Instytut Problemów Współczesnej Cywilizacji
im. Marka Dietricha

L

Strategia nauczania matematyki w Polsce

wdrożenie nowej podstawy programowej

Warszawa, 28-29 kwietnia 2010 r.

ISBN 978-83-89871-20-3

Adres:

Instytut Problemów Współczesnej Cywilizacji im. Marka Dietricha
ul. Koszykowa 80
02-008 Warszawa
tel. 22-234-70-07
fax 22-234-70-08
e-mail: instytut@ipwc.pw.edu.pl

Opracowanie redakcyjne i skład:

BETEX, ul. Irzykowskiego 2/100, 01-317 Warszawa, tel. 22-665-09-22

Druk:

Wydawnictwo SGGW
ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa, tel. 22-593-55-21

Szanowni Czytelnicy!

Z wielką radością, jak zwykle, przekazuję Państwu kolejny zeszyt. Podsumowuje on dwudniową konferencję poświęconą strategii nauczania matematyki w Polsce, z uwzględnieniem wdrażania nowej podstawy programowej.

Wszystkie konferencje, dotyczące problemów jakości nauczania są ważne, a szczególnie istotne w obecnym czasie są te, które dotyczą nauczania tak ważnych przedmiotów jak: matematyka, fizyka, chemia i biologia. Te bowiem przedmioty są podstawą kształcenia inżynierskiego, tak bardzo potrzebnego w dzisiejszych czasach.

Wyrażam raz jeszcze wielką radość z faktu, że matematyka powróciła na maturę jako przedmiot obowiązkowy. Decyzja ta już przyniosła pozytywne skutki, gdyż w sposób znaczący wzrosła liczba chętnych do studiowania w uczelniach technicznych. Lepsze nauczanie matematyczne wpłynie bardzo pozytywnie na poziom nauczania innych przedmiotów i wykształcenie młodych Polaków.

Zorganizowanie konferencji w ramach projektu: „Wdrożenie podstawy programowej kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół ze szczególnym uwzględnieniem II i IV etapu edukacyjnego", współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, priorytet III, działanie 3.3, poddziałanie 3.3.3 i zaproszenie tak licznego grona osób zainteresowanych tą problematyką, było możliwe dzięki współpracy z Ministerstwem Edukacji Narodowej i uzyskaniu środków unijnych.

Wszystkim Państwu, którzy przyczynili się do zorganizowania tej konferencji, jak również Państwu prelegentom i wszystkim uczestnikom, składam serdeczne podziękowanie i jednocześnie kieruję zaproszenie na kolejne seminaria poświęcone tej problematyce.

Tomasz Borecki
Dyrektor Instytutu Problemów
Współczesnej Cywilizacji
im. Marka Dietricha

O NAUCZANIU MATEMATYKI W POLSCE

Zbigniew Marciniak

Uniwersytet Warszawski
e-mail: zbimar@mimuw.edu.pl

Matematyka jest od niemal dwóch stuleci jednym z najważniejszych przedmiotów nauczanych w szkołach. Początek jej kariery w Europie datuje się na rok 1815: władcy Europy, dyskutujący na Kongresie Wiedeńskim o przyczynach sukcesów dopiero co pokonanego Napoleona Bonaparte, uznali, że jedną z przyczyn tych sukcesów mogło być bardzo poważne potraktowanie matematyki we francuskich szkołach oficerskich. Jest faktem, że wielu oficerów armii napoleońskiej było bezpośrednio zaangażowanych w badania z zakresu matematyki (wiele zawdzięcza im geometria rzutowa). Także sam Napoleon chętnie zajmował się matematyką. Przypisuje mu się odkrycie następującego twierdzenia geometrycznego: jeśli na bokach dowolnego trójkąta wybudujemy (na zewnątrz tego trójkąta) trzy trójkąty równoboczne, to ich środki ciężkości także utworzą trójkąt równoboczny, niezależnie od tego, jaki kształt miał wyjściowy trójkąt.

W konsekwencji, matematyka w szkołach ówczesnej Europy stała się przedmiotem, który odtąd miał nie tylko wyposażać uczniów w czysto praktyczne umiejętności arytmetyczne i pomiarowe, ale także wprowadzać w tajniki prowadzenia precyzyjnych rozumowań.

Polska edukacja także wpisała się w ten nurt. Nauczanie matematyki, jakie pamiętamy ze szkół naszej młodości, miało zdecydowanie ten charakter, zwłaszcza na poziomie szkoły średniej.

Lata siedemdziesiąte XX wieku stanowiły tu okres wyjątkowego rozkwitu nauczanych treści matematycznych. W ówczesnych programach licealnych znalazły się elementy poważnie potraktowanej analizy matematycznej, geometrii analitycznej oraz niebanalne obszary teorii prawdopodobieństwa. Stwarzało to fantastyczne warunki matematycznego rozwoju uczniów najbardziej uzdolnionych matematycznie; pod auspicjami uniwersytetów powstało kilkanaście liceów, rekrutujących najzdolniejszą młodzież, gdzie wymagania były jeszcze szerzej zarysowane, niż wspomniałem powyżej.

W warunkach dość wyśrubowanych powszechnych wymagań zawsze musi pojawić się pytanie o realność ich spełnienia. Nie ma wątpliwości, że były one w ogromnym stopniu spełnione przez absolwentów najbardziej renomowanych szkół średnich. Sytuacja w pozostałych szkołach budziła pewne wątpliwości, ale nie budziła grozy. Do szkół średnich przyjmowano zdolniejszą połowę rocznika, a do liceów ogólnokształcących – około 20% najzdolniejszych uczniów. Tak wyselekcjonowana młodzież radziła sobie z wymaganiami w sposób możliwy do przyjęcia. Potwierdzały to odczucie wyniki matur wewnątrzszkolnych; zdawalność tego egzaminu była na poziomie znacznie ponad 90%. Wprawdzie wkrótce potem uczelnie poddawały maturzystów powtórnej weryfikacji za pomocą egzaminów wstępnych, z której obronną ręką wychodził mniej więcej co drugi kandydat na studia, ale nie budziło to niepokoju. Choć narzekających nigdy nie brakuje, w zasadzie byliśmy zadowoleni z naszego poziomu nauczania matematyki oraz stanu przygotowania kandydatów na studia. Ale czy mogło być inaczej w czasach, gdy w uczelniach mieliśmy do czynienia z 10% najzdolniejszej polskiej młodzieży?

Pierwszym niepokojącym sygnałem były wyniki pierwszej centralnie zorganizowanej matury w roku 2002. Egzamin został przeprowadzony na nowych zasadach, bardzo utrudniających „pomoc” zdającym, zburzył idylliczny obraz sytuacji. Między innymi okazało się, że wielu maturzystów, znających algorytm badania przebiegu zmienności funkcji z wykorzystaniem zaawansowanych metod analizy matematycznej, nie jest w stanie pokonać zadania wymagającego elementarnych obliczeń procentowych. Postawiło to problem skuteczności nauczania matematyki wszystkich polskich licealistów, a nie tylko tych, których spotykaliśmy w naszych salach wykładowych. Wkrótce potem pojawiły się też głosy, płynące głównie ze strony wykładowców matematyki w uczelniach technicznych, alarmujące, że uczniowie przynoszą ze szkół głównie umiejętności czysto mechaniczne, które często stosują bezmyślnie. Na przykład, sposób stosowania wspomnianego wyżej algorytmu badania funkcji, stanowiącego ukoronowanie szkolnego kursu analizy matematycznej, obnażał często całkowite niezrozumienie sensu wykonywanych czynności, objawiające się dochodzeniem, na skutek popełnionych błędów rachunkowych do bezsensownych konkluzji, nie budzących jednak u studentów żadnego niepokoju (np. godzenie się z wynikiem obliczeń, z których wynika, że funkcja ma ujemną pochodną i jednocześnie rośnie do plus nieskończoności).

Druga połowa lat dziewięćdziesiątych przyniosła nam jeszcze jedno zjawisko: dramatycznie wzrosły aspiracje edukacyjne polskiego społeczeństwa. W efekcie, obecnie do szkół kończących się maturą uczęszcza, nie jak dawniej 50% rocznika, ale aż 80%, zaś liczba studentów naszych uczelni wzrosła niemal pięciokrotnie. Choć samo zjawisko zwiększonych aspiracji edukacyjnych jest bardzo pozytywne i wiele krajów nam tego zjawiska szczerze zazdrości, już same te dane pokazują, że wcześniejsze problemy związane z nauczaniem matematyki nie mogły zniknąć, a raczej powinny się pogłębić. Trudno bowiem liczyć na to, że na studiach pojawiło się pięciokrotnie więcej równie uzdolnionych młodych ludzi. Także w liceach ogólnokształcących, do których obecnie uczęszcza około połowy rocznika, pojawiło się wielu uczniów, którzy jeszcze kilka lat wcześniej kierowaliby swoje kroki w stronę zasadniczej szkoły zawodowej.

Zarówno nauczyciele szkół średnich, jak nauczyciele akademiccy dostrzegli, że nie mogą już liczyć na to, że ich uczniowie/studenci spełnią oczekiwania, które przez wiele lat uważali za oczywiste. Oczywiście, część słuchaczy dysponuje wiedzą na podobnym poziomie, jak dawniej, ale giną oni w tłumie osób znacznie słabszych.

Pojawienie się zjawiska masowego kształcenia zarówno na poziomie średnim, jak i wyższym, niesie skutek, którego natura jest czysto demograficzna: średni poziom uzdolnień populacji uczestników procesu obniża się. Nie można za to winić nauczycieli ani – tym bardziej – uczniów, pragnących zdobyć jak najlepsze wykształcenie. Należy jednak na to odpowiednio zareagować, by za pomocą odpowiednich działań zrekompensować skutki opisanego wyżej zjawiska.

Na poziomie oświaty tę reakcję stanowi nowa podstawa programowa. Zgodnie z tą podstawą, w zakresie matematyki nauczanie na poziomie szkoły średniej będzie się odbywać na dwóch poziomach. Na poziomie podstawowym matematyki muszą uczyć się wszyscy, w dotychczasowym wymiarze godzin; treści kształcenia pozostają mniej więcej takie same, jak obecnie. Jeśli jednak uczeń wybierze poziom rozszerzony, to otrzyma od drugiej klasy liceum po 6 godzin matematyki tygodniowo, a do treści kształcenia powrócą m.in. elementy rachunku różniczkowego. Tak więc odpowiedzią systemu edukacji na zróżnicowanie populacji uczniów jest zróżnicowanie oferty edukacyjnej.

Nowa podstawa programowa przyniosła też język wymagań – jasno sformułowanych warunków, jakie musi spełniać uczeń na końcu każdego etapu edukacyjnego. W szczególności, wyróżniono tak zwane wymagania ogólne, które odpowiadają na pytanie: jakie są główne cele nauczania danego przedmiotu? Dla matematyki najważniejszymi celami jest nauka rozumowania, myślenia strategicznego i modelowania. Podczas pracy na lekcji, opracowując różne tematy, mamy kształcić te trzy podstawowe umiejętności.

Także na poziomie szkolnictwa wyższego potrzebna jest podobna reforma. Prowadzenie rocznika studentów „ławą”, poprzez kolejne zajęcia dydaktyczne danego kierunku studiów, skuteczne w przypadku wyrównanej pod względem uzdolnień populacji studentów, obecnie traci sens, gdyż nie sprawdza się w stosunku do dużej jej części.

Dużym błędem było wycofanie obowiązku zdawania matury z matematyki na początku lat 80. Spowodowało to praktyczne zaniechanie uczenia się tego przedmiotu przez sporą grupę uczniów szkół średnich, z bardzo negatywnym skutkiem dla poziomu ich wykształcenia ogólnego. Wykształcił się nawet fałszywy stereotyp humanisty jako osoby, która nie jest w stanie „zniżyć się” do nauczenia matematyki. Niestety, ten szkodliwy stereotyp był wielokrotnie podtrzymywany przez niektóre osoby publiczne.

Na szczęście, powrót matematyki na maturę już mamy za sobą. Przedsięwzięcie odniosło pełny sukces, choć wielu ludzi słabej wiary wieszczyło katastrofę narodową. Egzamin wcale nie był banalny. Zgodnie z opisaną wyżej metodologią, zawierał on także zadania sprawdzające umiejętność prowadzenia rozumowań, których treść rozpoczynała się od słów „udowodnij, że...”.

Wprowadzenie obowiązkowej matury z matematyki już w pierwszym roku przyniosło bardzo pozytywne skutki. Po pierwsze, znacznie wzrosła liczba kandydatów do studiowania w politechnikach – to dobrze, gdyż wiemy, że mamy (nawet w skali Europy) znaczny deficyt absolwentów studiów technicznych. Po drugie – istotnie wzrosła (z 35 tys. do 55 tys.) liczba maturzystów, którzy zdecydowali się zdawać obok matury na poziomie podstawowym także maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym.

Opisane powyżej zabiegi modernizacyjne w zakresie nauczania oraz egzaminowania powinny przynieść w ciągu kilku najbliższych lat istotną poprawę stanu wiedzy i umiejętności matematycznych absolwentów polskich szkół i uczelni. Rozumiemy dziś równie dobrze, jak uczestnicy Kongresu Wiedeńskiego, że przyniesie to poprawę efektów całego systemu edukacji.

O STRATEGII NAUCZANIA MATEMATYKI W POLSCE. PRZEGLĄD GŁÓWNYCH WYNIKÓW PROJEKTU

Tadeusz Koźniewski

Uniwersytet Warszawski
e-mail: t.kozniewski@mimuw.edu.pl

Celem tego opracowania jest przedstawienie przeglądu wyników projektu „Strategia nauczania matematyki w Polsce”. W dalszej części konferencji poszczególne wątki będą omawiane bardziej szczegółowo. Moim celem jest przedstawienie ogólnego obrazu tego, co zostało wykonane. Zaprezentuję też listę wszystkich autorów i tytuły wszystkich prac, które zostały w ramach tego projektu napisane – od kilkusetstronicowych dysertacji do kilkustronicowych notek. Chciałbym, żeby ten przegląd ukazywał różnorodność i wielość kierunków prac zrealizowanych w naszym projekcie.

Zacznę od tego, że był to projekt badawczy rozwojowy finansowany ze środków na naukę Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Inicjatorem i kierownikiem projektu był prof. dr Zbigniew Marciniak. Prace projektu koordynowali doc. dr Tadeusz Koźniewski, prof. dr Edmund Puczyłowski, prof. dr Zbigniew Semadeni. Projekt realizowany był w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego od maja 2007 roku do listopada 2009 roku, przez dwa i pół roku. Oczywiście to, że był prowadzony w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, nie znaczy, że był realizowany wyłącznie siłami osób tam zatrudnionych. Wręcz przeciwnie, większość wykonawców, większość naszych autorów pochodzi spoza Uniwersytetu Warszawskiego.

Najpierw kilka ogólnych słów o projekcie, przede wszystkim o wykonawcach. Prace w projekcie wykonało 60 autorów. Są wśród nich pracownicy wyższych uczelni, doktoranci, nauczyciele i pracownicy innych instytucji oświatowych. Wynikiem ich działań jest 70 prac – artykuły różnego typu: od bardziej przeglądowych, do badań praktycznych, do analiz statystycznych, zbiorów zadań i innych materiałów dydaktycznych dla nauczycieli. Powstała także komputerowa baza danych dotycząca konkursów matematycznych w Polsce. W ramach grantu odbyły się trzy konferencje. Pierwsza – *Strategia nauczania matematyki w Polsce* miała miejsce w Warszawie w październiku 2007 roku. Była to konferencja informująca o tym, że taki grant został przyznany, promująca jego problematykę i zachęcająca do udziału w jego pracach. Wiele osób, które były na niej obecne, jest dziś na liście autorów grantu. Następne dwie konferencje organizowane w ramach projektu odbyły się w Sulejowie. Jedna w październiku 2008, druga w październiku 2009 roku. Nazywały się *Konkursy matematyczne w Polsce* i *Matematyka. Jak uczyć?* Ich celem była integracja środowiska nauczycieli i pracowników wyższych uczelni zainteresowanych podnoszeniem jakości nauczania matematyki w Polsce. Głównym inicjatorem i organizatorem tego przedsięwzięcia był prof. Edmund Puczyłowski z zespołem współpracowników.

Przejdę teraz do informacji na temat upowszechnienia wyników projektu. Artykuły powstałe w projekcie będą udostępnione w Internecie. Warto jednak zaznaczyć, że ich upowszechnianie właściwie już się zaczęło. Na konferencjach w Sulejowie, o których tu wspomniałem, część z materiałów, które zostały zgłoszone do projektu, była w swojej pierwotnej wersji przedstawiona jako odczyty. Zatem ich treść jest znana w środowisku aktywnych, zainteresowanych osób, które uczestniczyły w tych konferencjach lub zapoznały się z tym, co tam się działo. Te pierwotne wersje zostały potem jeszcze w większości uzupełnione, poprawione i rozszerzone. Oczywiście, przewidywana jest publikacja niektórych z tych wyników, artykułów badawczych w odpowiednich czasopismach zajmujących się nauczaniem matematyki, a także upowszechnienie stworzonych materiałów dla uczniów i nauczycieli w formie wydrukowanej, żeby osiągnąć jak najszerszy zakres ich dostępności.

Dokonam teraz przeglądu problematyki prac powstałych w projekcie. Proponuję, aby podzielić ją na pięć kategorii tematycznych. Chciałbym przy tym zaznaczyć, że jest to podział umowny. Zakresy tematów wzajemnie się przenikają. Są prace, które można by było równie dobrze umieścić w dwóch albo nawet więcej kategoriach.

Pierwszym tematem jest egzaminowanie i ocenianie. Problematyka prac dotyczy tu zarówno tego, jakie są egzaminy, ich wady i zalety, jak i propozycji pewnych zmian sposobu egzaminowania oraz analizy konsekwencji wynikających z tych propozycji.

Zanim przejdę do drugiego tematu, pozwolę sobie na uwagę o nieco ogólniejszym charakterze. Istotnym elementem ułatwiającym znalezienie rozwiązań problemów o znaczeniu systemowym w Polsce może być w wielu wypadkach analiza, jak analogiczne zagadnienia rozwiązywane są w innych krajach. W szczególności, jeśli chcemy podwyższać jakość nauczania matematyki w Polsce, to oczywistą jest rzeczą, że powinniśmy poznać działania innych krajów w tym zakresie. I stąd się wziął drugi wątek tematyczny – analiza systemów nauczania matematyki w wybranych krajach europejskich. Oczywiście jest to ogromny zasięg problemów, więc w projekcie ograniczyliśmy się do wyboru niektórych krajów i niektórych zagadnień. Myśleliśmy przede wszystkim o organizacji nauczania, standardach wymagań, przykładowych zestawach zadań egzaminacyjnych i o porównaniu uzyskanych danych z systemem polskim. W dalszej części tego opracowania wymienię prace, które zostały stworzone w tym wątku tematycznym. Zagadnienia te będą też tematem oddzielnego odczytu, który podsumuje uzyskane wyniki.

Trzeci temat został zapowiedziany już w momencie, kiedy zgłoszony został wniosek o sfinansowanie projektu. Jest to zestaw pytań dotyczących konkursów matematycznych w Polsce – ile ich jest, jaka jest ich jakość, ilu uczniów w nich bierze udział itd. I analiza ta została rzetelnie wykonana. Myślę, że obecnie mamy istotnie lepszy przegląd sytuacji niż jeszcze trzy lata temu.

Czwarty wątek tematyczny omawianego projektu dotyczy pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie. Chodzi tu zarówno o koncepcje organizacji pracy, jak i o materiały dla uczniów i nauczycieli. Materiałów tych powstało bardzo dużo i mają one różnorodny i inspirujący charakter.

I wreszcie ostatni wątek, też zapowiedziany w momencie, kiedy składano wniosek o sfinansowanie tego grantu. Jest to analiza stanu nauczania początkowego z matematyki związana ze zmianą systemu nauczania i z wejściem sześciolatków do szkoły.

Omówię teraz pokrótce niektóre wykonane prace, porządkując je według podziału tematycznego, jaki zaproponowałem powyżej. Zacznę zatem od egzaminowania i oceniania. Mamy tutaj na początek trzy prace zespołu: Krzysztof Ciesielski, Danuta Ciesielska i Zbigniew Powązka dotyczące egzaminowania, zarówno egzaminowania na studia, jak i egzaminowania testem PISA. Praca Ciesielskiego dotyczy egzaminów na studia. W 2005 roku w Krakowie na Uniwersytecie Jagiellońskim miała miejsce taka wyjątkowa sytuacja, że studenci byli rekrutowani na matematykę równocześnie za pomocą nowej matury i za pomocą testu przygotowanego przez uczelnię. Mogli przedstawić wynik nowej matury, mogli uczestniczyć w teście. Te wyniki były przeliczane i wyższy wynik liczył się w rekrutacji. W pracy omawiana jest korelacja wyników obu tych form sprawdzania wiedzy kandydatów. Okazuje się, że wyniki testu – przy czym warto wspomnieć, że test ten był zweryfikowany przez wieloletnie stosowanie go na Uniwersytecie Jagiellońskim – wykazały bardzo dobrą korelację z wynikami uzyskanymi na nowej maturze. Artykuł Ciesielskiego zawiera jeszcze wiele innych interesujących wątków, między innymi badanie, do jakiego stopnia wynik egzaminu wstępnego stanowi prognozę sukcesu na studiach. Odpowiedź nie jest jednoznaczna. Jest mianowicie wyraźna korelacja między dobrym wynikiem egzaminu wstępnego a ukończeniem studiów, ale nie ma istotnej korelacji między oceną ze studiów a wynikiem egzaminu. To znaczy, że osoby bardzo dobrze zdające egzamin niekoniecznie muszą ukończyć studia z bardzo dobrym wynikiem. Te oraz inne wyniki badań zespołu będą szerzej omówione w odczycie dr. Krzysztofa Ciesielskiego. Następna praca, którą chciałbym omówić dotyczy oceniania holistycznego, czyli takiego podejścia, w którym nie przyznaje się punktów według wykonanych czynności, tylko według tego, jak daleko rozwiązujący dotarł do całkowitego rozwiązania zadania. Praca ma źródło w następującej sytuacji. W grudniu 2007 roku grupa osób, które zajmowały się sprawdzaniem czy nadzorowaniem sprawdzania matur, na spotkaniu roboczym została poddana testowi. Najpierw oceniali maturę z 2007 roku według systemu czynnościowego. Potem, na podstawie wskazówek, których im udzielono, oceniali zadania metodą holistyczną. Następnie porównano uzyskane wyniki. Jest to bardzo interesujące opracowanie, mówiące w swoich konkluzjach o możliwych zaletach, ale nie omijające również zagrożeń, jakie wiążą z podejściem holistycznym.

Kolejna praca na temat egzaminowania dotyczy typów zadań matematycznych występujących w badaniach PISA, o które warto byłoby wzbogacić egzamin po gimnazjum. Jacek Lech i Agnieszka Sułowska przygotowali taki zestaw. Jest to około 30 zadań. Autorzy pracy mieli dostęp zarówno do jawnej, jak i niejawnej części egzaminu PISA i na podstawie tych zadań przygotowali zaproponowany zestaw. Ma on wiele zalet. Jedna jest taka, że jeśli by się takie zadania pojawiły na egzaminie po gimnazjum, to oczywiście siłą rzeczy jest szansa, że pojawiłyby się również w polskich szkołach. Nauczyciele starają się, żeby ich uczniowie dobrze wypadli na egzaminie, dlatego taki egzamin w jakimś sensie modeluje praktykę szkolną. Zadania PISA byłyby zatem bardziej obecne w polskiej szkole, jak również sam egzamin byłby bardziej wszechstronny, wzbogacony o nowy element.

Teraz chciałbym krótko omówić prace o nauczaniu matematyki w wybranych krajach europejskich. Temat ten rozpoczęliśmy od wspólnego, wstępnego ustalenia metodologii zbierania danych. Jak wspomniałem, chcieliśmy skoncentrować się na – po pierwsze – znajomości zagranicznego systemu szkolnego w każdym z badanych krajów. Po drugie – chcieliśmy ustalić podstawy programowe i standardy wymagań, czyli to, czego się naprawdę uczy. Po trzecie – chcieliśmy badać, jak się egzaminuje, jak wyglądają zadania egzaminacyjne. Chcieliśmy także porównać rozwiązania przyjęte w wybranych krajach z systemem polskim. Pełna lista pytań, które przygotowaliśmy była o wiele bardziej szczegółowa. Według tego schematu powstał najpierw artykuł Jolanty Chełmińskiej i Krzysztofa Chełmińskiego o nauczaniu matematyki w Badenii-Wirtembergii. Wybraliśmy Niemcy na początek, ale w Niemczech system edukacji jest bardzo zdecentralizowany i trzeba było zdecydować się na któryś z landów. Badenię-Wirtembergię wybraliśmy między innymi ze względu na to, że jest tam wysoki poziom nauczania. Potem, według wzorca, jaki stanowiła praca Chełmińskich, powstały artykuły Wojciecha Guzickiego i Lecha Kaźmierczaka odpowiednio o nauczaniu matematyki we Francji i w Austrii, pisane mniej więcej według tego samego schematu. Są w tym wątku tematycznym jeszcze dwie prace Bożeny Rożek dotyczące edukacji wczesnoszkolnej w Niemczech. Tutaj chciałbym zwrócić uwagę na jeden charakterystyczny szczegół. Otóż, w drugiej z tych prac podane są przykłady specyficznych zabiegów dydaktycznych w Niemczech. Wśród nich jest przykład nowego typu zadania ułożonego przez niemieckich dydaktyków. Zadanie to pokrywa się z jednym z 30 zadań, które są na liście Lecha i Sułowskiej w pracy, o której już wspominałem. Widać tu ewidentny międzynarodowy wysiłek, żeby zadania typu PISA rzeczywiście wprowadzić do systemu szkolnego.

Przejdę teraz do konkursów matematycznych w Polsce. Obszerne informacje na ich temat zawiera powstała w ramach projektu komputerowa baza danych. Została stworzona w kilku etapach. Najpierw przygotowaliśmy wstępną listę pytań, według której rozpoczęto zbieranie danych. Początkowo była to baza danych papierowa tworzona przez trzyosobowy zespół. Po dokonaniu przeglądu zebranych danych i weryfikacji kryteriów zbierania informacji, kolejnym etapem było stworzenie komputerowej bazy danych. Liczy ona w tej chwili około 130 konkursów i jest w dalszym ciągu aktualizowana. Jest dostępna w sieci pod adresem www.sem.edu.pl/konkursy. Ta baza danych została poddana analizie w pracy Pawła Kwiatkowskiego. Opisał on, jakie wnioski można wyciągnąć z informacji, które są w tej bazie zawarte. Wysunął też szereg nowych pytań badawczych. Na przykład sformułował interesujące pytanie, ile z tych konkursów tworzy własne, nowe, oryginalne zadania, a ile korzysta z zadań, które krążą i były już wcześniej używane. Inny problem, na który zwrócił uwagę Kwiatkowski, to porównanie wyników uczniów biorących udział w kilku konkursach różnego typu. Czy jest korelacja między wynikami uzyskanymi w konkursach, które mają zadania zamknięte i w konkursach mających zadania otwarte?

Warto jeszcze wymienić pracę, która jest lokalnym dopełnieniem ogólnopolskich wyników. Jest to praca Michała Niedźwiedzia dotycząca konkursów matematycznych w Krakowie i w okolicach. Zawiera ona przegląd danych na temat 30 konkursów, zebranych według schematu dosyć zbliżonego do zastosowanego w ogólnopolskiej bazie danych. Przy tym mniejsza skala tej pracy pozwala na większą szczegółowość. Autor podaje w niej między innymi przykłady zadań, jakie pojawiają się na omawianych konkursach.

Badane były także opinie nauczycieli na temat konkursów. Zostały przeprowadzone dwie ankiety. Pierwsza wśród aktywnych nauczycieli, którzy byli obecni na konferencji w Sulejowie jesienią 2009 roku. Była to ankieta na formularzu papierowym. Wypełniło ją 25 osób, czyli większość spośród tych, którzy zostali poproszeni o udział. Następnie na jej podstawie została stworzona przez socjologa Michała Puczyłowskiego ankieta w wersji elektronicznej, skierowana do nauczycieli w całej Polsce. Na ankietę tę odpowiedziało około 100 osób. Szczegółowe omówienie wyników znajduje się w pracy Michała Puczyłowskiego.

Również zadania konkursowe były przedmiotem analizy. Najgłębsze i najbardziej wszechstronne było badanie dotyczące zadań Olimpiady Matematycznej. Są to dwie obszerne prace Jacka Dymela. Zawierają bardzo szczegółową analizę dziesięciu wybranych zadań z 57. i 58. edycji Olimpiady Matematycznej, zarówno analizę statystyczną, jak i analizę błędów popełnionych przez zawodników. W drugiej z tych prac jest szczegółowy opis wszystkich uzyskanych rozwiązań zadań geometrycznych. Dla osób zainteresowanych metodami rozwiązywania zadań z geometrii jest to prawdziwa kopalnia wiedzy. W podobnym, tylko mniejszym zakresie taką analizę dla Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów przeprowadził Michał Niedźwiedź.

Przejdę teraz do opracowań związanych z pracą z uczniem uzdolnionym matematycznie. Tu chciałbym pozwolić sobie na drobną dygresję. Otóż, sprawa pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie jest oczywiście szalenie ważna, ale nie oznacza to, że w tym grancie chcieliśmy koncentrować się wyłącznie na uczniach uzdolnionych matematycznie. Wcześniejsze wątki tematyczne, o których była już mowa, dotyczą całości nauczania, zarówno uczniów bardziej, jak i mniej uzdolnionych. Chciałem na przykład podkreślić, że w konkursach matematycznych biorą udział i powinni brać udział nie tylko najzdolniejsi, nie tylko najbardziej aktywni. To powinna być droga do przyciągnięcia do matematyki również takich uczniów, dla których matematyka nigdy nie będzie najbardziej ulubionym przedmiotem. Nie znaczy to, że nie mogą oni czerpać przyjemności z uczestnictwa w konkursach i rozwiązywania zadań. Wróćmy jednak do tematu pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie. Koncepcję konsolidacji środowiska osób pracujących z młodzieżą uzdolnioną matematycznie zaproponował w swoim opracowaniu Edmund Puczyłowski. Chodzi o stworzenie platformy wymiany doświadczeń między nauczycielami, którzy pracują z uzdolnioną młodzieżą. Platforma ta mogłaby mieć wiele różnych postaci. Mógłby to być portal internetowy, mogłaby to być seria stałych konferencji, kółka, warsztaty itd. To wszystko będzie przedmiotem odczytu prof. Edmunda Puczyłowskiego w dalszej części tej konferencji.

Bardzo cennym materiałem dydaktycznym jest opracowanie Pawła Kwiatkowskiego i Bogumiła Pęciny, zawierające program koła matematycznego. Jest to praca stworzona z myślą o nauczycielach, którzy chcieliby poprowadzić kółko matematyczne, ale nie mają doświadczenia w pracy ze zdolną młodzieżą i może obawiają się, że nie potrafiliby sobie z tym wyzwaniem poradzić. W obiegu jest oczywiście mnóstwo zadań, ale to, co jest nową jakością w pracy Kwiatkowskiego i Pęciny, to zaproponowane scenariusze prowadzenia takiego kółka. Jest to obliczona na 30 tygodni, po 2 godziny tygodniowo, propozycja ścisłego programu zajęć wraz z przygotowanymi zadaniami. Nauczyciel, który nie ma doświadczenia, mógłby po prostu spróbować krok po kroku zrealizować ten program. W pracy jest też obszerna pula zadań uzupełniających (ogółem opracowanie zawiera kilkaset zadań), co umożliwia nauczycielowi wprowadzenie własnych modyfikacji programu zajęć, w miarę nabierania doświadczenia.

Dokonam teraz krótkiego przeglądu materiałów przygotowanych do pracy z uczniem zdolnym. Po pierwsze, są wśród nich zbiory zadań autorstwa wybitnych specjalistów od układania zadań matematycznych. Druga seria prac to krótkie, uporządkowane tematycznie zestawy zadań. Podzieliłem je na kilka typów. Jeden typ, najliczniej reprezentowany, to zestawy zrobione według następującego schematu: twierdzenie lub zestaw twierdzeń i potem seria zadań, których rozwiązania wykorzystują to twierdzenie. Drugi typ to serie zadań, w których jest podana jakaś wspólna technika stosowana w ich rozwiązaniach. Wszystkie one, mniej więcej, podobnie się rozwiązuje. I wreszcie trzeci typ, jest to jakby zaprzeczenie tego drugiego, mianowicie serie zadań zrobione dosyć pomysłowo w ten sposób, że każą uczniowi samemu wymyślać sposoby rozwiązania. I tutaj podane są tylko ogólne idee poszukiwań tych metod rozwiązania.

Wśród materiałów do pracy z uczniem mamy też artykuły o matematyce przeznaczone albo na kółko matematyczne, albo jako samodzielna lektura. Ich tematyka jest bardzo zróżnicowana, zawiera treści z algebry, geometrii, teorii nierówności itd. Chciałbym jeszcze wymienić dwa artykuły trochę jakby z obrzeża tej tematyki, przeznaczone dla nauczycieli i dotyczące metodyki nauczania.

Na koniec wymienię niektóre opracowania na temat analizy stanu nauczania początkowego z matematyki. Praca Agnieszki Demby z zespołem dotyczy opanowania przez absolwentów klasy III szkoły podstawowej umiejętności matematycznych niezbędnych w klasie IV. W badaniu wykorzystano testy przeprowadzone przez Gdańską Fundację Rozwoju we wrześniu 2007. Kierowniczka zespołu uczestniczyła w przygotowaniu testu i w ustaleniu metod jego oceniania. Gdańska Fundacja Rozwoju jest zainteresowana jedynie liczbą punktów uzyskanych przez uczniów. Natomiast zespół Agnieszki Demby dotarł do oryginalnych prac prawie 800 uczniów, wszystkich z trzech województw, reprezentatywnych dla całej Polski. Na podstawie tych prac dokonał analizy tego, jakie są mocne i słabe strony uczniów rozwiązujących te zadania.

Prace Zofii Muzyczki i Krystyny Sawickiej dotyczą zmian efektywności nauczania po wprowadzeniu kształcenia zintegrowanego i oceny opisowej. Autorki stwierdzają między innymi, że zmiany wprowadzone reformą z 1999 roku są pozytywnie oceniane zarówno przez nauczycieli, jak i rodziców. Praca Anny Wołyniak dotyczy rozumowania dzieci w wieku 4-7 lat, rozwiązujących zadania na mnożenie i problemu, co jest dla nich łatwiejsze: mieszczenie czy podział. Wątek projektu dotyczący analizy stanu nauczania początkowego z matematyki zamykają dwie prace Zbigniewa Semadeniego, na temat kształtowania pojęć matematycznych (studium teoretyczne) i na temat najnowszych polskich podręczników nauczania początkowego w zakresie edukacji matematycznej. Więcej szczegółów na temat prac dotyczących nauczania początkowego znajdzie się w odczycie profesora Zbigniewa Semadeniego na ten temat.

Kończąc, chciałbym jeszcze raz w imieniu organizatorów podziękować wszystkim autorom prac za udział w projekcie.

Lista prac powstałych w projekcie „Strategia rozwoju matematyki w Polsce”

1. Egzaminowanie i ocenianie

- Krzysztof Ciesielski – *Egzaminy wstępne na studia matematyczne a nowa matura*
- Krzysztof Ciesielski – *Badanie PISA przeprowadzone dla słuchaczy studiów podyplomowych*
- Danuta Ciesielska, Zbigniew Powązka – *Z badań nad wynikami testu PISA wśród studentów studiów matematycznych Akademiii Pedagogicznej w Krakowie w roku 2008*
- Henryk Dąbrowski, Mieczysław Fałat, Wojciech Guzicki, Zbigniew Marciniak, Anna Olechnowicz, Waldemar Rożek, Elżbieta Sepko-Guzicka,

Edward Stachowski, Agnieszka Sułowska – *Ocenianie holistyczne na poziomie maturalnym*

- Jacek Lech, Agnieszka Sułowska – *Typy zadań matematycznych występujących w badaniu PISA, o które warto byłoby wzbogacić egzamin po gimnazjum*
- Barbara Jastrzębska – *Ocenianie kształtujące (OK.)*

2. Systemy nauczania matematyki w wybranych krajach europejskich: organizacja nauczania, standardy wymagań, przykładowe zestawy zadań egzaminacyjnych, porównania z systemem polskim

- Jolanta Chełmińska, Krzysztof Chełmiński – *O nauczaniu matematyki w Badenii-Wirtembergii*
- Wojciech Guzicki – *Matematyka w szkołach we Francji*
- Lech Kaźmierczak – *O nauczaniu matematyki w Austrii*
- Bożena Rożek – *Edukacja matematyczna w Niemczech na poziomie Grundschule*
- Bożena Rożek – *Przykłady specyficznych zabiegów dydaktycznych w Niemczech na podstawie niemieckich badań w zakresie dydaktyki matematyki*

3. Konkursy matematyczne w Polsce: informacje o konkursach, opinie nauczycieli na temat konkursów, analiza zadań konkursowych

3.1. Informacje o konkursach

- Marzena Filipowicz-Chomko, Ewa Gilejko, Izabela Horenda-Kulbat, Katarzyna Kowalczyk, Paweł Kwiatkowski, Anna Poskrobko, Maria Donten, Jakub Pochrybniak – *Komputerowa baza danych: „Konkursy matematyczne w Polsce”*
- Paweł Kwiatkowski – *Konkursy matematyczne w Polsce. Próba podsumowania*
- Michał Niedźwiedź – *Przegląd konkursów matematycznych dla uczniów w Krakowie i okolicach*

3.2. Opinie nauczycieli na temat konkursów

- Michał Puczyłowski – *Analiza wyników ankiet na temat opinii środowiska nauczycielskiego o konkursach matematycznych*

3.3. Analiza zadań konkursowych

- Jacek Dymel – *Analiza zadań Olimpiady Matematycznej*
- Jacek Dymel – *Analiza rozwiązań zadań olimpijskich z geometrii płaskiej i przestrzennej*
- Michał Niedźwiedź – *Zadania stereometryczne w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów*

4. Praca z uczniem uzdolnionym matematycznie: koncepcje organizacji pracy, materiały dla uczniów i nauczycieli

4.1. Koncepcje organizacyjne pracy

- Edmund Puczyłowski – *Koncepcja konsolidacji środowiska nauczycieli pracujących z młodzieżą uzdolnioną matematycznie*
- Paweł Kwiatkowski, Bogumił Pęcina – *Program pracy koła matematycznego w szkole, dla uczniów starszych klas szkół podstawowych i uczniów gimnazjów*

4.2. Materiały dla uczniów i nauczycieli

➤ zbiory zadań

- Jacek Dymel – *Zadania dla olimpijczyków*
- Marcin Kuczma, Michał Pilipczuk – *Nierówności i maksymizacja. Zestaw zadań dla kółek matematycznych i zajęć fakultatywnych*
- Waldemar Pompe – *Zbiór zadań z geometrii*
- Tomasz Szymczyk – *Przed konkursem matematycznym*

➤ krótkie, uporządkowane tematycznie zestawy zadań

a) serie zadań poprzedzone twierdzeniem lub zestawem twierdzeń do wykorzystania w ich rozwiązaniach

- Jerzy Bednarczuk – *Siła potęgi*
- Jacek Dymel – *Wzory skróconego mnożenia*
- Wojciech Guzicki, Waldemar Pompe – *Twierdzenie Carnota*

- Renata Jurasińska – *Nierówności między średnimi liczbowymi i ich zastosowanie*
- Wojciech Martys – *Środek ciężkości układu punktów z masami*
- Henryk Pawłowski, Joanna Zakrzewska – *O pewnym uogólnieniu twierdzenia Ptolemeusza*
- Waldemar Pompe – *Czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*
- Waldemar Pompe – *O symetralnych, dwusiecznych i wysokościach w trójkącie*
- Tomasz Szymczyk – *Środek ciężkości punktów z masami – jeszcze kilka zadań*
- Tomasz Szymczyk – *Cztery punkty na okręgu*
- Tomasz Szymczyk – *Nierówność Schwarza*

b) serie zadań o typowej dla ich specyfiki technice rozwiązywania

- Maciej Bryński – *Kongruencje i ich dziwne zastosowania*
- Joanna Jaszuńska – *Jak grać, żeby wygrać?*
- Urszula Kapała – *Zadania zachęcające do uogólnień*
- Waldemar Pompe – *Równe sumy pól*
- Waldemar Rożek – *Kolorowanie*
- Paweł Rudecki – *Niektóre izometrie i ich zastosowania*
- Joanna Zakrzewska – *Wspólny punkt*

c) serie zadań prezentujące ideę poszukiwania metod rozwiązania bez podsuwania gotowych sposobów rozwiązania

- Paulina Domagalska – *Metoda niezmienników i półniezmienników*
- Wojciech Guzicki – *O dwóch metodach rozwiązywania zadań*
- Adam Osękowski – *O pewnej metodzie dowodzenia nierówności*
- Zdzisław Pogoda – *O zachęcaniu i zniechęcaniu do matematyki*

➤ artykuły o matematyce przeznaczone na kółko matematyczne albo jako samodzielna lektura dla zdolnych uczniów i dla nauczycieli

- Krzysztof Ciesielski – *O izomeriach i liczbach chromatycznych*
- Zbigniew Karczmarczyk – *O pewnym uogólnieniu nierówności Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego i co z tego może wynikać*

- Michał Krych – *Skąd się wzięła liczba i*
- Henryk Pawłowski – *Od wzorów skróconego mnożenia do klasycznych nierówności*
- Waldemar Pompe – *Twierdzenie Talesa*
- Michał Szurek – *Ścieżki do efektownej matematyki*

➤ **artykuły dla nauczycieli dotyczące metodyki nauczania matematyki**

- Wojciech Guzicki – *Zadania tekstowe bez równań*
- Edward Stachowski – *Budowanie modelu probabilistycznego dla doświadczenia losowego w zależności od problemu związanego z tym doświadczeniem*

5. Analiza stanu nauczania początkowego w zakresie matematyki (z uwzględnieniem problemu 6-latków i perspektywy obniżenia wieku szkolnego)

5.1. Badanie wiedzy matematycznej uczniów po klasie III szkoły podstawowej

- Agnieszka Demby – *Badanie wiedzy matematycznej uczniów po klasie III szkoły podstawowej. Raport końcowy z badań*
- Elżbieta Drewczynska-Mrożek – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Porównywanie różnicowe i ilorazowe – dobieranie działań do charakterystycznych zwrotów*
- Elżbieta Drewczynska-Mrożek – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Porównywanie różnicowe i ilorazowe – zadania tekstowe jednodziałaniowe z odwracaniem*
- Elżbieta Drewczynska-Mrożek – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Zadania tekstowe jednodziałaniowe z odwracaniem*
- Agnieszka Demby, Magdalena Klinkosz – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Mnożenie i dzielenie wykraczające poza tabliczkę mnożenia. Równania z okienkiem – mnożenie i dzielenie w zakresie tabliczki mnożenia, dodawanie i odejmowanie w zakresie 100*
- Agnieszka Demby, Aleksandra Góralska – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Pamięciowe dodawanie i odejmowanie w zakresie 10 000*

- Agnieszka Demby, Aleksandra Góralska – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Pamięciowe dodawanie i odejmowanie w zakresie 100 i w zakresie 1000*
- Agnieszka Demby, Elżbieta Drewczynska-Mrożek, Katarzyna Kroplewska – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Obliczenia zegarowe z przekroczeniem progu godziny*
- Agnieszka Demby, Elżbieta Drewczynska-Mrożek, Marta Szymańska – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Odczytywanie wskazań zegara ze wskazówkami i interpretacja w systemie 24-godzinnym*
- Agnieszka Demby, Karolina Stachowicz – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Podanie liczby lub daty spełniającej koniunkcję kilku warunków*
- Elżbieta Drewczynska-Mrożek, Aleksandra Góralska – *Opis i graficzna prezentacja wyników analizy na temat: Grupy uczniów o różnym stopniu sukcesu w poszczególnych zadaniach testu przeprowadzonego na początku klasy IV szkoły podstawowej*

5.2. Zmiany efektywności nauczania, w tym edukacji matematycznej dzieci, po wprowadzeniu kształcenia zintegrowanego i oceny opisowej

- Zofia Muzyczka – *Zmiany efektywności nauczania (w tym edukacji matematycznej dzieci) po wprowadzeniu nauczania zintegrowanego i oceny opisowej. Zebranie opinii nauczycieli klas I-III oraz rodziców w wybranych szkołach regionu nowosądeckiego i gorlickiego)*
- Krystyna Sawicka – *Zmiany efektywności nauczania (w tym edukacji matematycznej dzieci) po wprowadzeniu nauczania zintegrowanego i oceny opisowej. Zebranie opinii nauczycieli klas I-III oraz rodziców w wybranych szkołach regionu chełmskiego)*

5.3. Sposoby rozumowania dzieci w wieku 4-7 lat rozwiązujących zadania na mnożenie i dzielenie

- Anna Wołyniak – *Sposoby rozumowania dzieci w wieku 4-7 lat rozwiązujących zadania na mnożenie i dzielenie*

5.4. Kształtowanie pojęć matematycznych (studium teoretyczne)

- Zbigniew Semadeni – *Kształtowanie pojęć matematycznych na poziomie szkolnym*

5.5. Analiza pewnych niepokojących zjawisk dotyczących polskich podręczników z lat 2008 i 2009 do nauczania początkowego w zakresie edukacji matematycznej

- Zbigniew Semadeni – *O niepokojących zjawiskach dotyczących polskich podręczników z lat 2008-2009 do nauczania początkowego w zakresie edukacji matematycznej*

MATURA A EGZAMINY WSTĘPNE
na przykładzie studiów matematycznych na UJ oraz
NIESTANDARDOWE BADANIA ZWIĄZANE Z TESTAMI PISA

Krzysztof Ciesielski

Uniwersytet Jagielloński
e-mail: krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

Jestem niezwykle zaszczycony, że mogę kilka słów powiedzieć do tak wyśmienitego grona. To, o czym opowiem, to krótkie zreferowanie badań, nad którymi czuwał czteroosobowy zespół – wszyscy są na sali, proszę, by Państwo się pokazali: Danuta Ciesielska, Zbigniew Powązka, Edward Tutaj i ja. W czwórkę pracowaliśmy nad ogólną koncepcją, natomiast jeżeli chodzi o badania szczegółowe, to te, które były robione na Uniwersytecie Jagiellońskim przeprowadzałem ja, natomiast na Uniwersytecie Pedagogicznym, który się wtedy nazywał Akademia Pedagogiczna, Pani Ciesielska i Pan Powązka. Pan Tutaj już w tych szczegółowych badaniach nie uczestniczył, ale duchowy udział Pana Tutaja jest rzeczą bezcenną. Jeżeli ktoś go zna, to wie, że to nie jest dowcip, a jak ktoś nie zna, to musi uwierzyć na słowo.

Pokrótce omówię te badania; pełne opracowania zostały przekazane i są w tych materiałach, o których mówił Zbigniew Marciniak. Przy czym, a jest to istotne, będę co prawda mówił głównie o wspomnianych badaniach, ale przy okazji powiem też troszkę o moich własnych poglądach i za te poglądy tylko i wyłącznie ja ponoszę odpowiedzialność, chociaż nie wykluczam, że moi znakomici współpracownicy z wieloma rzeczami, które powiem, by się zgodzili.

Najpierw poświęcę trochę uwagi egzaminom wstępnym na studia matematyczne. Można powiedzieć, że pewne badania, które zostały zrobione, nie miały precedensu, i mnie się wydaje, że to naprawdę bardzo dobrze, że udało się je zrobić. O tym za chwileczkę.

Zadania na egzaminy wstępne na matematykę na UJ przez wiele lat układał zespół: Edward Tutaj, Piotr Tworzewski, Krzysztof Ciesielski. Niektóre z tych zadań były później wykorzystane w omawianych badaniach, one – i inne ciekawe zadania – zostały wydane w zbiorze zadań z matematyki z egzaminów wstępnych na UJ w latach 1986-2004. Ze względu na reformę, na wznowienie zbioru nie ma szans, uważam jednak, że warto się z tym zbiorem zapoznać, są tam ciekawe zadania, w tym autorskie „perełki" Edwarda Tutaja, które gorąco polecam.

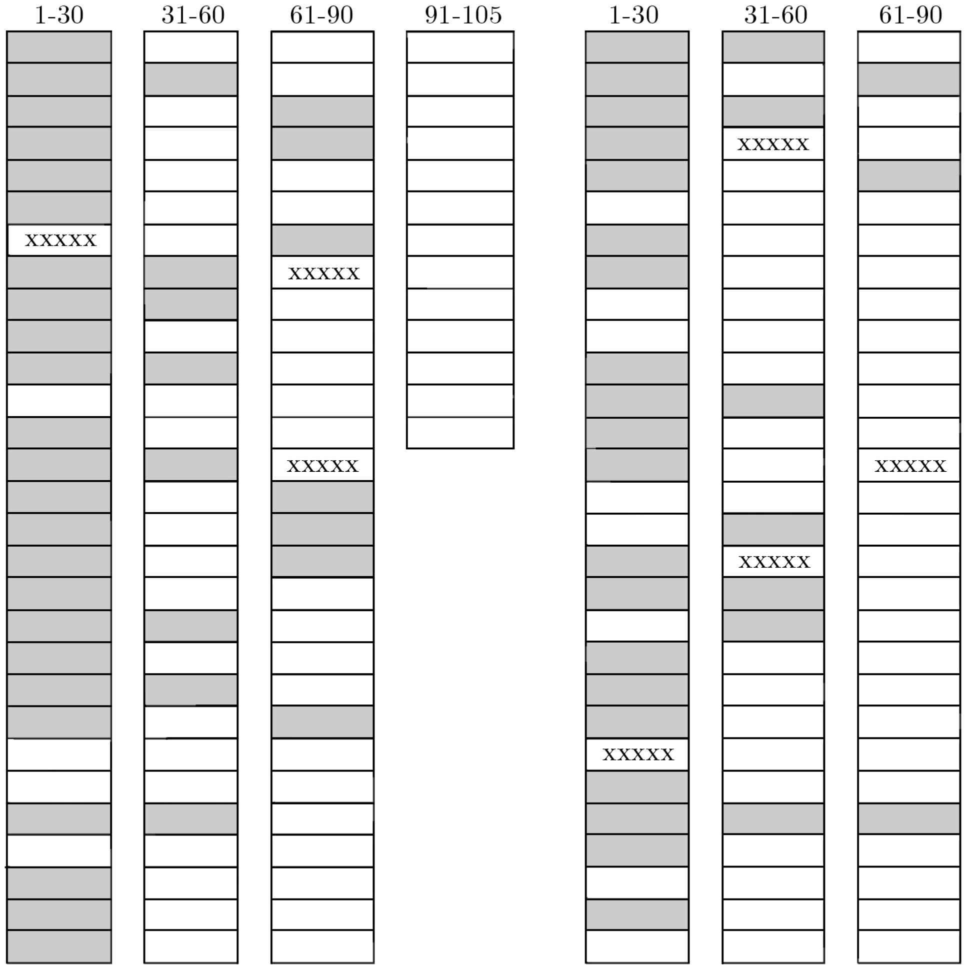
Parę słów o egzaminach wstępnych na przestrzeni lat. Dawno temu egzaminy odbywały się według tradycyjnego modelu: egzamin pisemny – w nim pięć zadań, potem egzamin ustny, przy czym tematy egzaminu pisemnego były przysyłane przez Ministerstwo. Od pewnego momentu – a było to ponad 20 lat temu – uczelnie mogły same opracowywać tematy i nawet decydować o formie egzaminu; Uniwersytet Jagielloński szybko skorzystał z tej możliwości. Organizowaliśmy ten egzamin pisemny według dotychczasowych zasad – pięć zadań – ale punktowaliśmy według dawnej skali Olimpiady Matematycznej, jednak z pewną modyfikacją. Otóż, zadanie punktowane było w skali 0-10, z wyłączeniem liczb 5-6. Uważam, że w przypadku zadań matematycznych bardzo istotną rzeczą jest ocenienie, czy ktoś zrobił zadanie, czy nie zrobił zadania. Nie jestem entuzjastą „punktowania za poszczególne elementy", raczej jestem zwolennikiem, oczywiście z pewnego rodzaju tolerancją, skali 0-1. Nie zawsze udaje się to zrobić. Oczywiście, biorąc pod uwagę specyfikę rozumowania matematycznego, czasami w zrobionym zadaniu trzeba coś obciąć, czasami wskazane jest, by coś przyznać przy nie zrobionym zadaniu – jednak ważna jest definitywna decyzja, czy uznajemy, że ten, czyją pracę sprawdzamy, zrobił zadanie, czy nie. Po kilku latach „własnych" egzaminów zrezygnowaliśmy z egzaminu ustnego. Dlaczego? Jestem wielkim zwolennikiem egzaminu ustnego na studiach, ale podkreślam – na studiach, w sytuacji, gdy egzaminuje wykładowca, który przedmiot wykładał. Natomiast w przypadku, kiedy na egzamin wstępny przychodzą uczniowie z różnych szkół, sytuacja jest zupełnie inna. Ten uczeń spotyka się z nami pierwszy raz w życiu, egzaminatorzy mówią o matematyce trochę innym językiem niż w szkole, w różnych szkołach matematyka nauczana jest różnymi stylami, czasami są – bez winy ucznia – różnice w mniej lub bardziej dokładnie przerobionym materiale. I przy tych wszystkich różnicach krótki egzamin ma decydować definitywnie, czy kandydata przyjmujemy, czy nie. A dochodzi jeszcze rzecz podstawowa: kandydaci, odpowiadając na egzaminie ustnym, odpowiadają na różne pytania. Ustalenie listy na podstawie takiego egzaminu nie jest do końca obiektywne. Nie było to w sumie aż takie istotne, bo kandydatów nie mieliśmy zbyt wielu, na egzaminie wstępnym chodziło w zasadzie o to, komu z tych słabszych dać szansę studiowania. Uznaliśmy jednak, że warto ten system ze wstępnym egzaminem ustnym zmienić, przy czym stwierdziliśmy, że 5 zadań do rozwiązania to za mało, dużo może zależeć od szczęścia – jedno zadanie miałoby zbyt dużą wagę – więc coś zamiast tego egzaminu ustnego trzeba zorganizować. Zamiast egzaminu ustnego zrobiliśmy test. Był to bardzo specyficzny test, omówię go dokładniej za chwilę. Gdy przeprowadziliśmy taki dwuczęściowy egzamin dwa razy, zrobiliśmy pewne porównanie. Okazało się, że gdy weźmie się pod uwagę wyniki samego testu, to otrzymamy przy kwalifikacji wyniki porównywalne, jak w efekcie połączonych wyników części pięciozadaniowej i testu. W tej sytuacji zrezygnowaliśmy z tradycyjnego egzaminu pisemnego. Test poprawia się prościej, a z drugiej strony dla kandydatów też jest wygodniej, gdy nie muszą zdawać przez dwa dni. Wobec tego od 2001 roku organizowaliśmy sam test.

Teraz podam wyniki pewnych opracowań. Popatrzmy na tabelę 1. Przedstawione są w niej pewne dane dotyczące wyników rekrutacji w latach 1995 i 1997.

W tabelkach brany jest pod uwagę wyłącznie egzamin pisemny, w pierwszym przypadku 105 osób zostało przyjętych na studia, w drugim – 90. Są ustawieni w słupkach „po 30 osób" w kolejności według wyniku części pisemnej; w pierwszym słupku – miejsca od pierwszego do trzydziestego, w drugim od 31 do 60, potem od 61 do 90 i w końcu od 91 do 105. W drugiej części – podobnie. Zacieniowanym polem zaznaczony jest student, który ukończył studia w terminie. Krzyżykami – student, który ukończył studia z opóźnieniem. Kratka pusta – to student, który się nie utrzymał na studiach. W tabelce umieściłem dwa roczniki, ale zbadanych zostało roczników kilkanaście i we wszystkich rocznikach mniej więcej tak samo to wygląda. Popatrzmy: ci, którzy byli u góry tabelki, praktycznie bez wyjątku kończą studia. Oznacza to, że egzamin, który organizowaliśmy, całkiem nieźle sprawdzał, czy ktoś się do tych studiów nadaje, czy nie. Natomiast, co ciekawe: gdy u tych, którzy się utrzymali na studiach, porównywane były wyniki egzaminu i wyniki uzyskane na studiach, to już takiej dobrej korelacji nie było; z tym bywało bardzo różnie. Zauważmy też pewną bardzo symptomatyczną rzecz: zazwyczaj, jeśli ktoś się utrzymał na studiach, to ukończył je w terminie. Proszę zwrócić uwagę, ile jest w tym roczniku 1995 osób „wykrzyżykowanych" – trzy. Jedynie trzy powtarzały rok. Obecnie takich osób, które kończą z opóźnieniem, mamy znacznie więcej.

Teraz nawiążę do matury. Proszę Państwa, moim zdaniem, matura z matematyki organizowana w takiej formie jak poprzednio, była bardzo niedobra – z kilku względów. Dokładnie pamiętam, było to w roku 1975, kiedy weszła nowa zasada pisania matury: do rozwiązania było 5 zadań, ale maturzysta

Tabela 1



1995/96
(105 osób przyjętych)

1997/98
(90 osób przyjętych)

miał wybrać trzy i te trzy mu się liczyły – przy czym – uwaga! – **on miał obowiązek napisać**, które trzy z tych pięciu wybiera – i te trzy mu się liczyły. Proszę Państwa, uważam to – przepraszam za wyrażenie – jeden z większych idiotyzmów w naszej poprzedniej maturze. Jak to jest z idiotyzmami, to trwało przez dwadzieścia parę lat. Nie wiem, czy jest ktoś na sali, kto nigdy nie popełnił błędu rachunkowego. „Kto z Was jest bez grzechu, niech pierwszy rzuci kamień”. Nie widzę zgłoszeń. Według mnie, taka matura była bardzo niekorzystna dla maturzystów. Inaczej byłoby, gdyby zorganizowano wybór zadań na innej zasadzie: uczeń zrobi tyle zadań, ile jest w stanie, być może wszystkie, ale liczą mu się trzy ocenione najwyżej. Nie, jemu kazano napisać: „wybieram te a te trzy". A co będzie, jeżeli on zrobi w ciągu trzech godzin pięć zadań, tymczasem w którymś z nich zrobił błąd rachunkowy, ale tego oczywiście nie wie i napisze, że wybiera akurat to zadanie, w którym popełnił błąd? Taki system bił w tych lepszych uczniów. Uczeń słaby, jeśli zrobi 2 zadania, będzie szczęśliwy, a jeśli trzy, to w ogóle wpadnie w entuzjazm. Natomiast uczeń dobry jest w stanie zrobić 5 zadań, ale z powodu głupiej pomyłki rachunkowej zostanie gorzej oceniony niż taki, co zrobił tylko trzy, a dwóch pozostałych nawet nie ruszył... No cóż, tendencja „bicia w tych najlepszych" czasami może przybierać i takie formy. Uważam ten system za skrajnie niesprawiedliwy. I on trwał prawie przez 30 lat!

Kiedyś Krzysztof Omiljanowski, który jest tu na sali, jako redaktor *Matematyki* podjął w tym czasopiśmie akcję, by zmodyfikować maturę: zamiast 3 zadań z pięciu, robimy 10 z dziesięciu! No i widać, że – po wielu latach – w końcu to się zmieniło. Nie wiem, czy w efekcie działań Kolegi Krzysztofa, ale wiadomo: kropla drąży skałę. W każdym razie, nowa matura jest już inna.

Pozwolę sobie jeszcze trochę pokrytykować starą maturę. Oto autentyczny przykład zadania matury z roku 1999.

Dla ciągu geometrycznego a_n zachodzą równości

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots = 2$$

Dla jakich k prawdziwa jest nierówność

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k < \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n + 1{,}9) \ ?$$

Moim zdaniem, jest to przykład fatalnego zadania. Jest bardzo dobrze, jeżeli zadanie matematyczne łączy pewne rzeczy, ależ niechże to robi logicznie, a tu widzimy w bardzo sztuczny sposób połączone ze sobą dwa zadania. A mogłoby być jeszcze gorzej... Na przykład, na egzaminie na studia ekonomiczne, gdzie zdawało się matematykę, język obcy i historię lub geografię, mogłoby się pojawić zadanie: „Rok, w którym była bitwa pod Grunwaldem, pomnożyć przez długość Wisły w kilometrach, wyciągnąć z tego pierwiastek kwadratowy i odpowiedź zredagować po angielsku."

Niech zatem tych zadań będzie więcej, ale niech każde z nich będzie „samodzielne", bo wtedy sprawdzimy większy materiał. Zgodnie z tą dewizą, a nie da się ukryć, że byłem za to jednym z głównych odpowiedzialnych, zrezygnowaliśmy na Uniwersytecie Jagiellońskim z części składającej się z pięciu zadań i zaczęliśmy organizować test, który nazwaliśmy testem krakowskim.

Na czym polegał ten test? Otóż, było w nim 50 pytań, przy czym 20 pytań to były pytania z podanymi pięcioma wariantami odpowiedzi, z których dokładnie jedna była prawdziwa. Nie było kary za błędne odpowiedzi. Podkreślam, z pięcioma wariantami, a nie z czterema, bo podanie jedynie czterech wariantów znacznie zwiększa szansę na przypadkową poprawną odpowiedź. Oto przykład takiego zadania z jednego z naszych testów:

> Która z poniższych figur nie jest przekrojem sześcianu?
> (A) trójkąt równoboczny
> (B) trójkąt prostokątny
> (C) prostokąt nie będący kwadratem
> (D) pięciokąt
> (E) sześciokąt

Pozostałe 30 pytań, to były pytania z prośbą o podanie samego wyniku. Przykład:

> Ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 4?

Należy wpisać w rubrykę liczbę i tyle. Wiem, że przy takim teście ginie samo rozumowanie, i kandydat, który przeprowadzi dobre rozumowanie, a popełni drobną pomyłkę, nie dostanie punktu. Jednak, jeśli tych pytań jest wiele, to jedna czy druga pomyłka nie zaważy istotnie na całościowym wyniku. I taki test jest bardzo dobry do przeprowadzenia rekrutacji, bo mamy 50 pytań, każde inne, dotyczą one różnych działów matematyki, test sprawdzi znajomość większego materiału. I ten test robiliśmy przez lata. Ale potem nadeszła nowa matura.

I tu pojawił się problem. Wyznam, że byłem wielce sceptyczny co do nowej matury – tymczasem kazano nam ją obowiązkowo uwzględniać przy rekrutacji. To znaczy, w pierwszym roku nowej matury jeszcze dopuszczano – choć nie było to proste do realizacji – inne możliwości rekrutacji, ale w naszym przypadku sprawa nie była banalna. Co mamy zrobić? Matematyka nie była tym kierunkiem, na który ludzie się pchali drzwiami i oknami, nie było tak, że mieliśmy 30 kandydatów na miejsce. Jeżeli my powiemy, że nie akceptujemy matury, to ci lepsi pomyślą sobie: „mam dobrze zdaną maturę, po co mam jeszcze coś zdawać..." Pójdą gdzie indziej, i szkoda, że do nas nie przyjdą. A z drugiej strony, jak mamy zaakceptować nową maturę, skoro nie mamy do niej zaufania?

Uważam, że najlepiej byłoby całą procedurę przeprowadzić inaczej. Otóż, należałoby przez kilka lat organizować jednocześnie maturę i egzamin wstępny i porównywać wyniki. Jeżeli się będą pokrywać, to uczelnie z entuzjazmem same zrezygnują z egzaminu, bo po co się mają męczyć. A jeżeli się nie będą pokrywać, to by oznaczało, że albo egzaminy są robione niedobrze, albo matura jest robiona niedobrze. Wyniki egzaminów się zazwyczaj sprawdzały, więc wobec tego należałoby zmienić profil matury. Niestety, tak nie zrobiono i w szczególności nie było *de facto* możliwości porównania, jak nowa matura i dawne egzaminy ze sobą współdziałają. Jednak dzięki temu, co w roku 2005 zrealizowaliśmy przy rekrutacji na studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim, można było dokonać pewnych porównań nowej matury i naszych egzaminów. Nic nie wiem o innych badaniach tego typu i sądzę, że fakt, że udało nam się dokonać takiego porównania, jest naprawdę godny uwagi.

Otóż, zdecydowaliśmy się zrobić coś takiego. W roku 2005 przepisy dopuszczały organizowane testu kompetencyjnego, przy czym nie wolno było przeprowadzać testu z matematyki, bo nie wolno było dublować matury. Myśmy zrobili rekrutację w sposób następujący: organizujemy test, ale maturę też uznajemy. Skoro nie wolno było organizować testu nazwanego testem z matematyki, zorganizowaliśmy „test kompetencyjny z algebry, geometrii i działów pokrewnych". Ustaliliśmy, że każdy może podejść do naszego testu, ale przy rekrutacji liczymy – po odpowiednim przeliczeniu – wynik lepszy. Nie podejdziesz do testu – liczymy przy rekrutacji maturę. Podejdziesz do testu, kiepsko napiszesz – liczymy maturę. Napiszesz lepiej niż maturę – liczymy test, możesz sobie poprawić wynik. Dzięki temu bardzo dużo kandydatów pisało ten test. Nie pisali praktycznie tylko tacy, którzy mieli na maturze wynik bliski maksymalnego. Dzięki temu można było wyniki matury i testu porównać. Przy czym tak liczyliśmy punkty za test i maturę, że dobrze napisany test był porównywalny z naprawdę dobrze napisaną maturą.

Przypomnę, że wtedy uczniowie pisali maturę na poziomie podstawowym i niezależnie, jeśli chcieli, na poziomie rozszerzonym, a myśmy uznali, że tym, którzy pisali wyłącznie na poziomie podstawowym, też należy dać szansę przyjścia do nas, jeśli będą miejsca, a oni napisali maturę podstawową dobrze. Przy czym rozszerzona jako trudniejsza powinna być bardziej brana pod uwagę. Algorytm, na podstawie którego ustalany był wynik, to $\max\{m, t\}$, przy czym m to odpowiednio policzony wynik matury, t – wynik testu. Wynik z matury liczyliśmy jako $(1/3)a + (2/3)b$, gdzie a to wyrażony w procentach wynik z poziomu podstawowego, b to wyrażony w procentach wynik z poziomu rozszerzonego. Oznacza to, że podstawową maturę liczymy z wagą $1/3$, rozszerzoną z wagą $2/3$. Maksymalnie można było dostać 100 punktów. Test, jak mówiłem, miał 50 zadań, a wcześniej standardowo próg, przy którym kandydaci się dostawali, wynosił 25-30. Jak to przeliczyć, żeby tak napisany test konkurował dopiero z naprawdę dobrze napisaną maturą? Zrobiliśmy tak, że wynik punktowy z testu był liczony wg wzoru $3\min\{n,25\}+\max\{n-25,0\}$, gdzie n jest liczbą poprawnych odpowiedzi. Praktycznie wyglądało to w ten sposób, że za każdą z 25 pierwszych poprawnych odpowiedzi kandydat otrzymywał trzy punkty, a za każdą z pozostałych poprawnych 1 punkt, czyli jeżeli ktoś odpowiedział na 20 pytań, miał 60 punktów, na 25 pytań – 75 punktów, a potem każde następne dodawało mu po punkcie. Odpowiedział na 30 pytań, miał 80 punktów i taki w zasadzie był wtedy próg porównywalny z wynikiem 80% na nowej maturze.

Dzięki temu, że kandydaci pisali w większości zarówno test, jak i maturę, myśmy mogli te wyniki porównać, zbadać. Wydaje mi się, że mało gdzie była szansa porównania takich wyników. Aż 273 osoby pisały wówczas zarówno nasz test, jak i nową maturę. Współczynniki korelacji liczone według algorytmu Excela, gdzie maksymalny wynik to 1, a minimalny to -1, wyszły nam bardzo ładne: wyników matury i testu 0,63, wyników matury z ostatecznym wynikiem rekrutacji 0,83 i wyników testu z ostatecznym wynikiem rekrutacji 0,89. I to był argument, na podstawie którego spokojnie mogliśmy zrezygnować z testu i akceptować maturę. Wydaje mi się, że te badania są bardzo cenne, bo potwierdzają, że nowa matura istotnie ma merytorycznie prawo zastąpić dawne egzaminy wstępne. Różnice są w granicach dopuszczalnego błędu.

Potem też chcieliśmy taki test robić, choć już wiedzieliśmy, że możemy spokojnie akceptować maturę. Chcieliśmy jednak dać kandydatom szansę poprawy wyniku, nasi studenci bardzo sobie tę możliwość chwalili. Jednak, mimo że nie organizowaliśmy testu z matematyki, ale test kompetencyjny z algebry, geometrii i działów pokrewnych, po roku 2005 też nie mogliśmy go organizować, bo potem już w zarządzeniach bardzo wyraźnie zostało napisane, że treści programowe nie mogą się powtórzyć.

Nie wymagaliśmy w teście zapisania rozumowania, ale taki test też może różne rzeczy sprawdzić. Przeczytam – może niektórzy z Państwa to znają – fragment opowiadania Roberta Gravesa *Wstrętny pan Gunn*, przełożyła Zofia Kierszys. Narratorem jest były uczeń, wspominający swoją szkolną przeszłość.

...Pan Gunn dał nam do rozwiązania zadanie z podręcznika Arytmetyka dla szkół przygotowawczych Hilderbranda polegające na tym, że trzeba było obliczyć pierwiastek do kwadratu sumy dwóch bardzo długich ułamków dziesiętnych, podzielonej (jak na złość) przez sumę dwóch bardzo złożonych zwykłych ułamków. Po chwili wszyscy mozolnie coś gryzmolili, tylko F.F. Smilley siedział roztargniony, przecierał okulary i patrzył przez okno.

Pan Gunn podniósł na chwilę wzrok znad listu, który pisał, i zapytał złośliwie:

– Czerpiesz natchnienie z tej niedalekiej wieżyczki kościelnej, Smilley?

– Nie, panie profesorze. Przecieram okulary.

– A to dlaczego, proszę?

– Zapaćkały się marmoladą, panie profesorze.

– Nie odszczekuj, chłopcze. Dlaczego nie rozwiązujesz zadania?

– Już napisałem rozwiązanie, panie profesorze.

– Pokaż swój zeszyt!... Ach tak, rozwiązanie napisałeś. Sir Izaacu Newtonie, mój wielce oświecony i pomysłowy przyjacielu – szarpnął Smilleya za te krótkie włosy – ale gdzie obliczenia, którymi do tego doszedłeś?

– Nigdzie, panie profesorze. To po prostu samo mi przyszło.

– Samo ci przyszło, F.F. Smilley, chłopcze? Chcesz powiedzieć, że spróbowałeś odgadnąć na chybił trafił?

– Nie, panie profesorze, po prostu zastanowiłem się i zrozumiałem, że rozwiązanie może być tylko takie.

– Ha! Dziwne fizyczne zjawisko! Ale muszę zażądać dowodu, żeś nie zajrzał do rozwiązań podanych na końcu podręcznika.

– No, potem zajrzałem, panie profesorze.

– Prawda powoli wychodzi na jaw.

– Ale w rozwiązaniu z podręcznika jest błąd, panie profesorze. Ostatnie dwie cyfry powinny być trzydzieści pięć, a nie pięćdziesiąt trzy.

– Coraz ciekawsze! Oto chłopiec w trzeciej klasie naszej szkoły, który wie lepiej niż profesor Hilderbrand, wybitny matematyk w Cambridge.

– Nie, panie profesorze, ja myślę, że to błąd drukarski.

– No i patrzcie, znalazł się stary przyjaciel profesora Hilderbranda. Jakoś bardzo gorąco bronisz go.

– Nie, panie profesorze, poznałem pana Hilderbranda osobiście, ale niezbyt mi się spodobał.

Skończyło się tak, że Pan Gunn wysłał ucznia do dyrektora z karteczką, że „zechce Pan Dyrektor wychłostać tego krnąbrnego ucznia”, co pan dyrektor z radością uczynił. No, teraz to by było u nas absolutnie niemożliwe. Ale dlaczego o tym mówię? Bo w tej maturze, która była poprzednio, za niezbyt szczęśliwą rzecz uważam to, że rozwiązania były ocenianie „punkt po punkcie, punkt po punkcie”. Od matury zależy wynik przy rekrutacji na studiach.

Za to można uciąć punkt, za to można stracić punkt. Nauczyciele w związku z tym muszą tak uczniów uczyć i do takiego rozwiązywania zadań ich przygotowywać. Muszą to robić tym bardziej wtedy, gdy taka matura jest podstawą rekrutacji na studia. Tymczasem, przy tym systemie ginie to, co w matematyce jest niezwykle istotne – rozwiązanie problemu. Ktoś może dostać wiele punktów, mimo że zadania nie rozwiązał... Tymczasem nie raz czy nie dwa pisanie szczegółów naprawdę nie jest konieczne. Znam przykłady świetnych matematycznie ludzi, którzy w wielu miejscach nie muszą niczego pisać czy uzasadniać, bo oni widzą, że pewna własność zachodzi, że ona wynika z poprzedniej i tu dla nich żaden dodatkowy komentarz nie jest potrzebny. Na tejże maturze sprzed paru lat było takie zadanie, na które po prostu popatrzyłem i wiem: aha, to rozwiązuję w pamięci. Jeśli ja to rozwiążę w pamięci, to najlepsi uczniowie nieraz zrobią to jeszcze szybciej. I co – jeśli jedynie napiszą wynik, to czy będzie to uznane przy tym „odgórnie zdefiniowanym" punktowaniu i sprawdzaniu? W tym momencie pojawia się problem i jest tu pewien kłopot.

Zrobiliśmy coś jeszcze. W 2007 roku już nie można było takich badań powtórzyć, ponieważ nie wolno było organizować własnego egzaminu wstępnego, ale jesienią daliśmy do napisania test egzaminacyjny studentom. W oparciu o te zadania z ubiegłych lat opracowałem zestaw 37 zadań – tym razem 37, a nie 50, by to było do napisania w czasie dwóch godzin; rodzaje pytań zostały zachowane w odpowiednich proporcjach. Dałem to do rozwiązania studentom I roku i porównałem wyniki z ich wynikami sprzed paru miesięcy na maturze. Oni pisali ten test „z zaskoczenia": nie wiedzieli, co ich czeka. A ponadto dałem, też z zaskoczenia, ten test 37 pytań studentom III roku. Uwaga – jeśli chodzi o III rok, to ten test dałem tej samej grupie ludzi, która pisała w 2005 roku nową maturę i test, i była badana dwa lata wcześniej; czyli po prostu ta sama grupa ludzi dostała 2 lata później tego samego typu pytania, oczywiście nie te same. Badana grupa nie była dokładnie tą samą, ale istotnie mniejszą, bo w roku 2005 badanych było 270 osób, część z nich się nie dostała na studia, a części po 2 latach już nie było na studiach matematycznych. Poleciłem im podpisać się imieniem i nazwiskiem, by skorelować to z wynikami matury czy testu sprzed 2 lat. Może zacznę od tego, że ciekawe były reakcje studentów, gdy poinformowałem ich, że będą pisać test taki, jak egzamin wstępny. Otóż, III rok ryknął śmiechem i pisał. Rok I ryknął mniejszym śmiechem, ale też się śmiali. Na I roku były na sali próby niedozwolonej współpracy, mimo że ludzie obok siebie pisali zadania teoretycznie inne, bo był podział na grupy. Podział polegał na tym, że zadania były te same, ale przepermutowane, przy czym studenci o tym, że to są te same zadania, nie wiedzieli. Na III roku żadnych prób współpracy nie było. Ale tu korelacja z maturą wyszła znacznie mniejsza, może dlatego, że jednak nie pisali testu w warunkach stresu i wiedzieli, że od wyniku w sumie nic nie zależy. Korelacja wyników matury i testu na I roku (przebadanych zostało 118 osób) wyszła 0,46. Nie najgorsza, ale mogła być lepsza. A oto kolejne wyniki, tym razem dotyczące III roku, gdzie test w 2007 roku pisało 69 studentów. Korelacja wyników testu 2007 z wynikami testu 2005 (zbadana na próbce 56 studentów) to 0,51, wyników testu 2007 z wynikiem rekrutacji 2005: 0,35 (też na próbce 56 studentów). Natomiast porównanie wyników na pewnym podzbiorze tej grupy, czyli tych samych studentów, którzy pisali test w roku 2005 i 2007, dało korelację wyników testu 2007 z wynikami testu 2005 na grupie 43 studentów wynoszącą 0,70.

I teraz właśnie doszedłem do kolejnej badanej grupy. Były u nas organizowane, z funduszy Unii Europejskiej, podobnie jak w wielu innych miejscach, studia podyplomowe dla nauczycieli przedmiotu różnego od matematyki, którzy chcą uczyć matematyki w szkole podstawowej lub gimnazjalnej jako drugiego przedmiotu. Nie jestem entuzjastą tego pomysłu. Uważam, że do uczenia matematyki należy być odpowiednio przygotowanym merytorycznie i matematyki powinny uczyć osoby odpowiednio matematycznie wykształcone. Same studia podyplomowe, po magisterium z czego innego, odpowiedniego przygotowania na pewno nie dadzą. Ale skoro takie studia i tak powstały i były organizowane, to my, mając na UJ odpowiednio kwalifikowaną kadrę, też się w to włączyliśmy i takie studia zorganizowaliśmy. Słuchaczom tych studiów podyplomowych też daliśmy do rozwiązania ten test, dokładnie taki sam. Najciekawszą dla mnie w tym eksperymencie okazała się obserwacja wcale nie matematyczna, ale z innego zakresu. Otóż, mimo że słuchacze studiów podyplomowych pisali jako jedyni test pod pseudonimami, bez podawania nazwisk, anonimowo, to przez dwie godziny pisania testu nie udało się zaprowadzić spokoju na sali. Oni przez cały czas rozmawiali, porozumiewali się i nie udało się u nich osiągnąć pełnej samodzielności, mimo że też byli podzieleni na grupy, sąsiedzi mieli pytania ustawione w innej kolejności. Poza tymi rozmowami, przy poprawianiu – w przynajmniej kilku przypadkach – zauważyłem ewidentną mocną współpracę lub być może odpisywanie przez jedną osobę od drugiej. Może to się wydawać dziwne, że to się da zauważyć, przecież oni podawali jedynie wyniki lub litery: A, B, C, D, E, ale jestem, jeśli chodzi o poprawę prac, naprawdę już tak doświadczony, że nawet przy pytaniach tego typu jestem w stanie odkryć niesamodzielność, jeśli to dotyczy większej liczby pytań. Po prostu, jeżeli parę błędów się pojawia i to są te same niestandardowe błędy, to dzięki tym błędom niesamodzielność wychwycę. Dodam, że to przykre – studenci nie odpisywali i nie współpracowali, podając własne nazwiska, a piszący anonimowo niektórzy nauczyciele – przeciwnie...

Podam jeszcze średnie wyniki testu (maksymalnie można było uzyskać 37 punktów): I rok – 25,6; ci, którzy potem zaliczyli I rok – 27,9; III rok – 29,7. Test pisali wtedy również studenci studiów uzupełniających (inaczej: II stopnia – absolwenci państwowych szkół zawodowych, już po 3 latach studiów i uzyskaniu licencjatu, bo wtedy jednocześnie były organizowane studia pięcioletnie i studia II stopnia) – oni uzyskali średnią 22,0. Teoretycznie, oni powinni być matematycznie najlepsi, bo już ukończyli studia I stopnia w jakiejś szkole zawodowej, ale podkreślam – w szkole zawodowej, nie na uniwersytecie, i już mieli uprawnienia do nauczania matematyki, jednak uzyskali wynik znacznie gorszy niż ci rekrutowani na UJ na I rok – to też jest istotna informacja. Natomiast studenci podyplomowi uzyskali średni wynik 20,8. Oni byli magistrami chemii, fizyki czy studiów technicznych, a matematyki – na dosyć podstawowym poziomie – właśnie się douczali.

Może ciekawą będzie informacja, jakie zadanie okazało się najtrudniejsze, czyli zajęło 37 miejsce. Na roku I i na roku III, najtrudniejsze okazało się to samo zadanie, mianowicie pytanie, ile płaszczyzn symetrii ma sześcian. Na roku I uzyskano za to zadanie (punktowane w skali 0-1) średnio 0,15 punktu, na roku II 0,35. Natomiast w przypadku studiów podyplomowych nie było to zadanie ostatnie, ono zajęło miejsce 33, ze średnim wynikiem 0,26. Dla słuchaczy studiów podyplomowych najtrudniejsze okazało się zadanie takie: jakie współrzędne ma obraz punktu (2,3) w rzucie prostopadłym na prostą o równaniu $y - 2x + 3 = 0$. Średnio uzyskano jedynie 0,07 punktu. Na I roku to zadanie zajęło miejsce 35, ze średnią 0,26, a na III miejsce 30, ze średnią 0,66. Zadania wyszły różnie – jedne okazały się łatwiejsze, inne trudniejsze – u standardowych studentów też to zadanie wyszło kiepsko. Było to dla mnie trochę zaskakujące, przecież to zwykły rachunek! Zaskoczyło mnie, że więcej studentów podyplomowych wie, ile płaszczyzn symetrii ma sześcian, niż potrafi efektywnie taki rachunek przeprowadzić.

Ostatnią rzeczą, którą omówię, będą pewne badania związane z testami PISA. Pomysł takich badań przyszedł nam do głowy w Warszawie, na pierwszej konferencji z tego cyklu. Tej konferencji, o której Pan Tadeusz Koźniewski przed chwilą mówił, konferencji, która zainaugurowała tę serię spotkań. Jak wiadomo, w wielu krajach niemal na całym świecie przeprowadzane są na uczniach piętnastoletnich słynne badania PISA. Przyszło nam do głowy pytanie – jak w tych badaniach wypadliby nauczyciele? To jest nie do sprawdzenia, przecież nauczyciele nie są badani, a byłoby bardzo ciekawe porównać wyniki uczniów z wynikami ich nauczycieli. Bardzo ciekawe byłoby nawet nie to, jaki wynik nauczyciele by osiągnęli, ale to, czy problemy mają w tych samych zadaniach, w których mają je uczniowie; wiadomo, w różnych krajach różne zadania okazują się tymi najtrudniejszymi. Ale który nauczyciel zgodzi się na to, żeby go przebadać? Jednak nam przyszedł do głowy pomysł, gdzie to można zrobić. I ten pomysł zrealizowaliśmy. W jaki sposób? Właśnie na tych studiach podyplomowych, gdzie „złożyliśmy im propozycję nie do odrzucenia" – macie Państwo napisać ten test, a dokładnie dwa testy – egzaminacyjny i odpowiednio przygotowany test PISA. Słuchacze studiów podyplomowych nie wiedzieli, że będą mieli pisać jakieś testy. Po prostu jedno spotkanie było temu poświęcone. Normalnie przyszli na zajęcia i wtedy się dowiedzieli, że mają rozwiązać testy. Test PISA – dokładnie taki sam – pisali również studenci na Uniwersytecie Pedagogicznym; tam badanie zostało przeprowadzone na studentach sekcji nauczycielskiej pod koniec ich studiów, czyli na ludziach, którzy wkrótce mieli skończyć studia i zostać nauczycielami.

Jak zostało zrobione nasze badanie? Konsultowałem się z Panią Agnieszką Sułowską i z Panem Zbigniewem Marciniakiem na temat szczegółów badań PISA, bo choć te badania były i są dostępne, nie jest jednak szczegółowo podawane, jak pytania są dobierane i układane w zestawie. Miałem zadania z testów z ostatnich lat, te podane do publicznej wiadomości, z opracowanymi statystykami, i ich chciałem użyć. Dowiedziałem się, że one są wstawiane w testy losowo, w niektórych testach są te zadania, w niektórych inne, a są też oczywiście zadania niematematyczne, które razem tworzą zestaw. Próbka badanych jest tak duża, że te zadania, mimo że pisane przez różne osoby, mogą być analizowane i porównywane. Wobec tego z zestawu zadań PISA 2003 wybrałem 19 zadań matematycznych, które nigdy jako takie nie występują w jednym, całościowym zestawie. Z dostępnych zadań zrobiłem jeden zestaw matematyczny i studenci podyplomowi oraz Uniwersytetu Pedagogicznego taki zestaw pisali. Ten zestaw jako całość jest podany w materiałach, o których mówił Zbigniew Marciniak. Można było rozwiązania dokładnie ocenić według kryterium oceny badań PISA, według tych instrukcji, które tam są podane w opracowaniach. Maksymalnie można było dostać 37 punktów.

Jak się można domyślić, wyniki były niezłe, bo to jednak zadania klasyczne, szkolne, choć oczywiście nie wszyscy zrobili wszystko. Nie było źle, bo można było zdobyć od 0 do 37 punktów i większość wyników była bliska. Wykres obrazujący wyniki, to taka mocno przesunięta krzywa Gaussa. Trójka studentów Uniwersytetu Pedagogicznego uzyskała 37 punktów, takiego wyniku nikt nie osiągnął na studiach podyplomowych. Te wyniki, choć nie są takie najgorsze, jednak nie są też idealne, bo osiągnięte zostały też rezultaty 23, 25, 27 punktów. To, mimo wszystko, może trochę niepokoić, bo jak na osobę, która uczy

czy też ma uczyć matematyki i rozwiązuje jedynie nieznacznie ponad połowę zadań, to nie jest dobrze.

Dodam, że przy tym teście studenci podyplomowi też wciąż rozmawiali, a tu już nie było podziału na grupy. Jeżeli chodzi o studentów podyplomowych – oni pisali anonimowo, ale prosiłem ich też o podawanie różnych danych, np. prosiłem o podanie roku ukończenia studiów, czyli można było stwierdzić, czy jest to „świeżo upieczony" magister czy też osoba, która ukończyła studia dawno, może 20 lat temu. Prosiłem też o podanie, jakie studia skończyli, nie tylko o kierunek, ale też na jakiej uczelni; czy obecnie uczą w szkole i czego. Zazwyczaj widocznej korelacji między wynikiem testu a tymi danymi nie było, w szczególności nie było żadnej korelacji między wynikami obu testów i rokiem ukończenia studiów – to okazało się zupełnie losowe. Jeżeli chodzi o test egzaminacyjny, to nieźle wypadli absolwenci fizyki. Ale coś można było zaobserwować – rzecz ciekawą, a chyba niepokojącą. Otóż, okazało się, że niektórzy ze słuchaczy studiów podyplomowych już w trakcie odbywania tych studiów uczyli matematyki w szkole – co prawda nie mieli do tego oficjalnych uprawnień, ale jednak uczyli. I oni właśnie zazwyczaj w teście PISA wypadli bardzo słabo. Właśnie ci, którzy już uczyli i chcieli teraz dostać oficjalne uprawnienia, a nie ci, którzy jeszcze matematyki nie uczyli, ale chcieli się do tego przygotować. Notabene dodam, że potem na tych studiach podyplomowych był końcowy egzamin i nie wszyscy ten egzamin zdali, nie wszyscy ukończyli te studia. Ciekawą rzecz zaobserwował Edward Tutaj, który był kierownikiem tych studiów. Okazało się, że nie raz i nie dwa ci, którzy byli absolwentami studiów zupełnie nie związanych z matematyką, czyli nie na przykład po uczelniach technicznych, akurat bardzo ładnie ten egzamin końcowy zdali – oczywiście nie wszyscy z nich.

Jeszcze kilka zdań na temat pewnych korelacji. Porównane zostały wyniki obu testów dla studentów podyplomowych. Te testy były tak różne, i z różnego typu punktacją, że trudno porównywać wyniki punktowe, ale można było słuchaczy uszeregować w kolejności według zdobytych punktów, w pewnego rodzaju rankingu. Zbadany został współczynnik korelacji miejsc w tych dwóch testach, wyniósł 0,22. Widać, że PISA z testem egzaminacyjnym raczej nie współgrała.

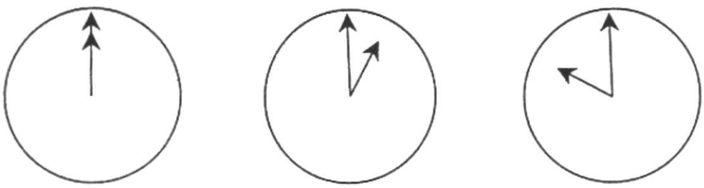
Natomiast można było uczynić inne ciekawe obserwacje. Porównaliśmy korelację stopnia trudności zadań, one są podawane przez organizatorów testu PISA w zbiorowych danych; można tam znaleźć informacje, jaki wynik (w procentach) uzyskali uczniowie na świecie i w Polsce, odpowiadając na poszczególne pytania. W związku z tym, że takie wyniki były dostępne, mogliśmy stwierdzić, które z zadań było dla uczniów najtrudniejsze, a które najłatwiejsze i ułożyć je w kolejności. Także porównać, które zadania są szczególnie trudne dla uczniów na świecie, które dla uczniów w Polsce, dla słuchaczy studiów podyplomowych i dla studentów Uniwersytetu Pedagogicznego oraz zbadać korelacje po ułożeniu tych zadań w kolejności według ich trudności. Przedstawiają się one tak: studenci podyplomowi i uczniowie w Polsce – 0,75; podyplomowi i studenci na świecie – 0,72; studenci Uniwersytetu Pedagogicznego i uczniowie w Polsce – 0,74; studenci Uniwersytetu Pedagogicznego i uczniowie na świecie – 0,63. Całkiem dobre korelacje, ale jednak bez rewelacji.

Na zakończenie kilka zdań na temat tego, które spośród 29 podanych zadań okazały się w poszczególnych grupach najtrudniejsze. Dlaczego spośród 29, a nie 19? Ponieważ niektóre zadania składały się z paru podpunktów, każdy podpunkt był osobno oceniany. Najpierw zadanie takie:

Rozmowa przez Internet

Mark (z Sydney w Australii) i Hans (z Berlina w Niemczech) często porozumiewają się ze sobą przez Internet, za pomocą tzw. „czatu". Żeby móc tak rozmawiać, muszą wchodzić do Internetu w tym samym momencie.

Chcąc znaleźć odpowiednią porę na taką rozmowę, Mark szukał diagramów pokazujących czas w różnych miastach świata. Oto, co znalazł:



Greenwich, 24:00 Berlin, 1:00 w nocy Sydney, 10:00 rano

1. Która godzina jest w Berlinie, kiedy w Sydney jest 19:00?

2. Mark i Hans nie mogą „rozmawiać" w godzinach 9:00-16:30 czasu lokalnego, ponieważ są wtedy w szkole. Nie mogą też łączyć się między 23:00 a 7:00 rano czasu lokalnego, bo w tych godzinach powinni spać. Kiedy Mark i Hans mogą porozmawiać przez Internet? Wpisz do tabeli czasy lokalne.

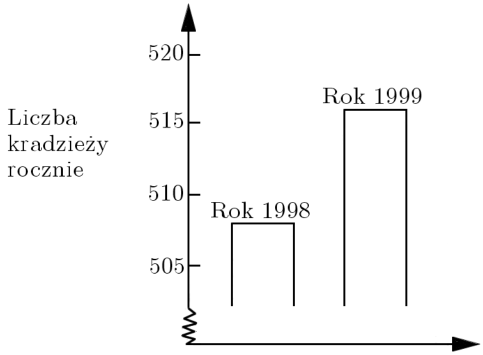
Część pierwsza wyszła całkiem, całkiem... W przypadku podyplomowych to zadanie znalazło się na miejscu 9, jeśli zaczynamy od najłatwiejszego, dla studentów UP 17, dla uczniów w Polsce 13, dla uczniów na świecie 14. Natomiast druga część zadania okazała się trudna. To zadanie, czyli druga część, dla studentów podyplomowych było najtrudniejsze – miejsce 29, dla studentów

Uniwersytetu Pedagogicznego – miejsce 27, dla uczniów w Polsce – 28, dla uczniów na świecie – 27.

Teraz zadanie kolejne, to, które okazało się najtrudniejsze dla studentów Uniwersytetu Pedagogicznego.

Kradzieże

W telewizji dziennikarz pokazał następujący wykres



i stwierdził: „Wykres pokazuje, że między rokiem 1998 a 1999 nastąpił ogromny wzrost liczby kradzieży.”

Czy uważasz, że stwierdzenie dziennikarza jest trafną interpretacją tego wykresu?

Uzasadnij swoją odpowiedź.

I tu jest rzecz bardzo ciekawa: w przypadku studentów Uniwersytetu Pedagogicznego to zadanie wyszło najgorzej – miejsce 29, dla studentów podyplomowych – miejsce 27, czyli też pod sam koniec, natomiast dla uczniów i na świecie, i w Polsce, to zadanie zajęło miejsce w środku i to jest bardzo zaskakujące. W temacie zadania na wykresie pojawia się pewne uproszczenie – liczba 505 jest zaraz nad osią, tu zrobiony jest taki skrót. Nie wiem, może dorośli po prostu nie zwracają uwagi na takie detale, a dzieci sprawdzają uważnie, w każdym razie, to zadanie fatalnie wyszło w porównaniu z innymi w przypadku ludzi dorosłych, a w przypadku uczniów tak się nie stało.

I jeszcze, dla pełnego obrazu, jakie zadanie sprawiło najwięcej trudności uczniom.

Kroki

Na rysunku widać ślady stóp idącego mężczyzny. Długość kroku P to odległość pomiędzy końcami dwóch kolejnych śladów.

Dla mężczyzn, wzór $\frac{n}{P} = 140$ podaje przybliżoną zależność między n a P, gdzie:

n = liczba kroków na minutę,

P = długość kroku w metrach.

1. Zastosuj ten wzór do kroków Janka i oblicz, jaka jest długość jego kroku, jeśli Janek stawia 70 kroków na minutę. Przedstaw swoje obliczenia.

2. Bernard wie, że długość jego kroku wynosi 0,8 metra. Zastosuj wzór do jego kroków. Oblicz, z jaką prędkością chodzi Bernard. Podaj odpowiedź w metrach na minutę oraz w kilometrach na godzinę. Przedstaw swoje obliczenia.

Można powiedzieć, że jest tu zastosowanie takiej bardzo elementarnej fizyki. Znowu, z pierwszą częścią nie było kłopotów, a dla dorosłych zadanie znalazło się w czołówce; w przypadku podyplomowych – miejsce 3, dla studentów UP – 4, dla uczniów w Polsce – 17, dla uczniów na świecie – 13. Ale druga część w przypadku uczniów wyszła najgorzej, zarówno w Polsce jak i na świecie – miejsce 29. Natomiast dla studentów tak podyplomowych, jak i UP znalazło się na miejscu 26.

I jeszcze jedna obserwacja. Przy poprawie testów widać było, że ci dorośli ludzie, niektórzy studenci, mają czasami trudności z odczytywaniem informacji zadanych przy pomocy tabel i diagramów, również czasami z wyciąganiem logicznych wniosków z danych, a to jest rzeczą trochę niepokojącą.

Na zakończenie chciałbym podkreślić, że mnie się wydaje, że w tym co zrobiliśmy dwie rzeczy są mocno niestandardowe i na to chciałbym zwrócić uwagę. Pierwsza, to wykorzystanie okazji na porównanie matury z testem egzaminacyjnym. Udało się to zrobić, a bardzo trudno doprowadzić do badania, w którym rozwiązującym zadania naprawdę bardzo zależy na wyniku. Jak widać, w chwili, gdy damy do rozwiązania test, od którego tak naprawdę nic nie zależy, rozwiązujący jednak inaczej do niego podchodzą. Druga rzecz, to danie do rozwiązania zadań testu PISA grupie ludzi dorosłych związanych z nauczaniem i zbadanie wyników. Wydaje mi się, że te rzeczy mogą wzbudzić pewne zainteresowanie.

Dziękuję bardzo.

OCENIANIE HOLISTYCZNE

Wojciech Guzicki

Uniwersytet Warszawski
e-mail: guzicki@mimuw.edu.pl

Proszę Państwa, mam opowiedzieć trochę o ocenianiu w kontekście zadań maturalnych. Tak jak Pan Koźniewski wspominał, parę lat temu został powołany zespół, który miał się zająć m.in. nową maturą. Mieliśmy się przyjrzeć temu, jak są układane zadania, jak są oceniane, jak są sprawdzane. Wystąpiliśmy z pewnymi pomysłami, jak to robić trochę inaczej niż do tej pory. Każdy z nas, jeżeli kiedykolwiek uczył i oceniał zadania, to oczywiście wie, jak należy oceniać zadania matematyczne. Nawet – powiedziałbym więcej – każdy chyba wie najlepiej na świecie, a przynajmniej w jeden jedyny słuszny sposób, to jest ten swój. To chyba jest jasne, przynajmniej ja do takich osób się zaliczam i znam bardzo wielu, którzy uważają podobnie. W takim razie, o czym tu w ogóle mówić? Proszę Państwa, w moim przekonaniu, jak zresztą mówił Pan Ciesielski, zadania matematyczne są oceniane bardzo prosto: zrobił albo nie zrobił. Jak nie zrobił, to nie zrobił i kropka. Tylko, że to się nie bardzo nadaje na egzamin, podczas którego musimy iść na pewne ustępstwa, musimy pokazać – tak, zrobił, ale nie końca. Zaczął, zaczął troszkę bardziej albo troszkę mniej; dokończył, ale może nie do końca. I tego rodzaju jakieś ustępstwa musimy robić.

Chciałbym opowiedzieć, jak to było robione podczas kilku pierwszych matur i co zaproponowaliśmy oraz czym nasza propozycja się różni. Okaże się, że niewiele, ale różnica chociaż niewielka jest warta opowiedzenia. Może jeszcze jedna bardzo ważna uwaga. Mianowicie, jeżeli będziemy tak oceniać: zrobił – nie zrobił, to się oczywiście będziemy bardzo różnić i okaże się, że nie będzie dwóch osób, które jednakowo oceniają, czy zadanie zostało zrobione, czy nie. Naszym zadaniem natomiast ma być stworzenie oceny obiektywnej, przynajmniej w jakimś sensie obiektywnej. Chcemy, żeby takie samo rozwiązanie było tak samo oceniane w Przemyślu i w Szczecinie, przez zupełnie różnych egzaminatorów, którzy nigdy w życiu się nie widzieli. I to jest rzecz bardzo ważna. Jeżeli to ma być system egzaminacyjny, który ma decydować o rekrutacji na studia, to on musi być bardzo obiektywny, bo ci ludzie będą studiować w różnych miejscach i można sobie wyobrazić, że ktoś będzie zdawać maturę w Szczecinie, a wybierze studia w Krakowie czy odwrotnie i wobec tego system musi być jednakowy. Co zrobiono w momencie, jak wprowadzono maturę, już tę nową, ocenianą przez egzaminatorów spoza szkoły, tzw. ocenianą zewnętrznie? Otóż, wprowadzono w tym celu taki system oceniania, który się nazywał systemem czynnościowym. Co to znaczyło? Znaczyło to, że jakieś rozwiązanie zadania – przyjęte przez autora za standardowe, tzn. takie spodziewane, że maturzyści będą tak rozwiązywać – zostało podzielone na pewne etapy i za wykonanie każdego etapu był jeden, czasem dwa punkty. Na ogół jeden. Jak podzielono rozwiązanie na siedem etapów, to zadanie miało siedem punktów – wykonanie każdego kolejnego z tych etapów dawało jeden punkt. Oczywiście powstał problem, co zrobić, jeżeli uczeń się gdzieś pomylił, ten błąd ciągnie, ale robi właściwie to, co powinien robić. Czynność, w której się pomylił, nie była uznawana, tam maturzysta nie dostawał punktu. Ale dalej, jeżeli to nie naruszało ogólnego toku rozumowania, to następne punkty mógł otrzymywać. Było to dość skomplikowane i nie odpowiadało przede wszystkim temu – o czym wspominał Pan Ciesielski – że przy takiej ocenie nie mogliśmy powiedzieć jednoznacznie, czy zadanie naprawdę zostało rozwiązane, czy nie.

To chyba był jeden z głównych punktów, o których mówiłem, że musimy w jakiś sposób sprecyzować, czy zadanie naprawdę zostało zrobione, czy nie, a przynajmniej, czy jego zasadnicza część została zrobiona. Jak to było do tej pory, chciałem pokazać na dwóch przykładach, które miałem przed oczami, kiedy myślałem o tym systemie, który ktoś nazwał holistycznym. Do końca tej nazwy nie akceptuję, ale już nie będę się kłócić o słowa. Było takie zadanie z rachunku prawdopodobieństwa: urna, kule – albo dokładamy białą, albo zabieramy czarną czy odwrotnie. Możemy dołożyć białą albo zabrać czarną i pytamy, które prawdopodobieństwo na wyciągnięcie czegoś jest większe. Ważne jest, jak wyglądał schemat oceniania tego zadania, jak ono było oceniane. Oceniane były trzy czynności. Obliczenie prawdopodobieństwa w jednej urnie – jeden punkt, w drugiej urnie – drugi punkt, i odpowiedź na pytanie, które jest większe – trzeci punkt. Co mnie denerwowało w tym podziale? Po pierwsze – dwa razy oceniamy dokładnie to samo, dwa razy identyczne zadanie. A trzeci punkt, proszę Państwa? Na maturze wiadomo, że będziemy sięgać trochę w głąb wiedzy ucznia, ale może nie do klasy piątej szkoły podstawowej. Tam należało odpowiedzieć, czy np. ułamek $4/9$ jest większy od ułamka $3/7$, czy nie. Oni mają kalkulator, bo mogą mieć. Wbiją jedno, wbiją drugie i widzą, co większe. Za to był punkt równoważny tym punktom, które już były wcześniej. Mnie się to nie podobało. Czułem, że to nie tak. W pierwszym momencie, jak zobaczyłem ten system, pomyślałem, że może on nie jest taki zły. Tak sobie to wyobraziłem: gdybyśmy mieli katalog umiejętności ucznia – maturzysta powinien się wykazać listą np. 111 umiejętności i teraz wybieram na maturę 50 z nich. Przydzielam po jednej umiejętności do różnych zadań tak, że żadna się nie powtórzy i wtedy zakładam, że jak maturzysta dostanie 37 punktów na 50, tzn. że z tych wybranych 50 umiejętności wykazał się znajomością przynajmniej 37. Ale tak się nie da zrobić. Nie wyobrażam sobie tak ułożonych zadań. To przedstawione przed chwilą na pewno temu nie odpowiada, bo dwa razy oceniamy to samo i raz oceniamy coś, czego wcale nie chcemy oceniać. Nie jest więc to na pewno dobre zadanie.

Drugie zadanie, o którym chciałem opowiedzieć – jakaś działka trójkątna, niektóre wymiary podane, jakaś cena za metr kwadratowy i trzeba było obliczyć, czy kwota 26 tys. zł wystarczy na zakup działki. Popatrzmy, jak to jest oceniane. Przede wszystkim, dlaczego 7 punktów? Co jest oceniane? Weźmy pierwszy sposób rozwiązania, najbardziej typowy. Autor zadania przewiduje, że będziemy to tak oceniać. Zastosowanie skali planu do wyznaczenia rzeczywistych długości, czyli przeliczenie tych centymetrów na planie do wymiarów rzeczywistych, zmiana jednostek długości – z centymetrów na metry. Zgadzamy się, że maturzysta powinien to umieć; co prawda, może powinniśmy to sprawdzić pięć lat wcześniej, może więcej niż pięć. Obliczenie długości jakiegoś boku – tam akurat było twierdzenie Pitagorasa. I tak dalej przez te siedem czynności. Można spytać – dlaczego siedem? Nie wiem i nawet nie mogę tego skrytykować, dlatego że to jest jego prawo, on sobie tak wyobraził i nie ma żadnego przepisu, który mówiłby, w jaki sposób te czynności w zadaniu wydzielamy. Tak, jak się komu podoba. Muszę powiedzieć, że bardzo mi się to spodobało, tak – absolutna wolność. Jestem jej ogromnym zwolennikiem, ale z drugiej strony, jak już ta wolność jest za duża, to robi się bałagan. Pomyślałem sobie, że coś chciałbym tutaj zaproponować inaczej. A poza tym, zupełnie nie widzę, gdzie on to zadanie rozwiązał, nie wiem – gdzie? za ile punktów? Więc pomyślałem sobie, że w takim razie spróbujemy inaczej.

W zespole, w którego pracach uczestniczyłem, cały czas ten pomysł żyje. Postanowiliśmy sobie: spróbujemy powiedzieć co innego, spojrzeć na zadanie w całości i tak naprawdę stwierdzić, co zostało w nim zrobione. Pierwsze założenie, jakie przyjęliśmy, to żeby nie było takiej arbitralności: trzy punkty czy siedem punktów, bo to się tak na maturze wahało między trzy a siedem. Powiedzieliśmy sobie: praktyka jest taka, że jest dziesięć zadań na maturze –

50 punktów, tego nie naruszamy, 5 punktów za zadania, kropka. Później uznaliśmy, że może jedne są troszkę prostsze, drugie troszkę bardziej skomplikowane – plus, minus jeden punkt. Cztery do sześciu, więcej nie ruszamy, ale tak zasadniczo pięć punktów. Jak je teraz dzielimy? Ta myśl, aby określać czynności, za które daje się punkty, nie jest zła. Musimy pamiętać, że egzaminatorom trzeba dać niezwykle precyzyjne wytyczne, żeby one były zrozumiane w całej Polsce tak samo. Musi być wyraźnie napisane – zrobił to, dostaje punkty za tę czynność, nie zrobił – nie dostaje. Jak jest w pracy taki i taki napis, jak miał ułożyć równanie i gdziekolwiek widzę w tej pracy napisane takie równanie – daję punkt, nie ma tego równania – nie daję punktu. To jest jedno kryterium. My musimy robić podobnie. Tylko jak to dzielić, ile punktów dawać? W tym momencie postanowiliśmy, że w każdym zadaniu spróbujemy wymusić od autora zadania sprecyzowanie, o co w tym zadaniu naprawdę mu chodziło, co jest istotą tego zadania. Jasne, że nie ta ostateczna odpowiedź. Za tą ostateczną odpowiedzią kryje się pewne postępowanie istotne dla zadania i jakieś rutynowe czynności, np. jakieś obliczenia prowadzące do ostatecznego wyniku. Pamiętam, zaproponowałem taką nazwę – *pokonanie zasadniczych trudności zadania*. Proszę Państwa, kiedyś chodziłem po górach. I tam, jak człowiek się wspinał, był już po trudnościach, to wtedy się mówiło, że można się rozwiązać, schować linę do plecaka, do szczytu już dojdziemy. To były te zasadnicze trudności. A jeszcze były takie określenia – oderwać się od ziemi, oderwał się od ziemi albo się nie oderwał, gdzieś tam doszedł i tam gruchnął albo nie doszedł. I tak sobie pomyślałem, to bardzo dobre sformułowania i to przekładamy na język zadań.

Przyjęliśmy takie podstawowe założenia naszego systemu oceniania. Nie patrzymy na poszczególne kroki, ale patrzymy na całość i patrzymy, dokąd zdający doszedł w tym rozwiązaniu. To była jedna rzecz. A teraz, jakie były wyróżnione istotne momenty w rozwiązaniu? Powiedzieliśmy – za to będziemy dawać punkty, ale wtedy pojawia się pytanie, jakie są te istotne momenty. Patrzę na zadanie i stwierdzam – nic istotnego w tym zadaniu nie zrobił. To jest ta najniższa kategoria. Coś zrobił; coś, co jest konieczne, choć mało, ale warto zauważyć – oderwał się od ziemi, nawet gdzieś tam doszedł, zostały pokonane trudności, ale nie do końca. Gdzieś tam parę razy odpadł, trochę się potłukł. Dobrze, potłukł się, wraca trochę potłuczony, więc następna kategoria – pokonał zasadnicze trudności. A potem mógł jeszcze pójść dalej. Znów coś zrobił. Mógł się pomylić, a mógł dojść do końca bezbłędnie – zrobił wszystko. Jak już mamy taką klasyfikację, to dalej podział punktów jest łatwy. Proszę zauważyć, że wszystkie zadania są wtedy oceniane według tego samego schematu. Jeżeli mam zadanie 5-punktowe, wiem, co znaczą trzy punkty.

On zrobił to, czego żądałem od niego. Zostały mu tylko rutynowe czynności. Dostał cztery, zrobił to, co należało i tylko w trakcie tej końcowej rutyny się pomylił, np. zrobił błąd rachunkowy czy coś zgubił, jakieś rozwiązanie – to się czasem zdarza. Są jakieś takie usterki, za które powinniśmy mu obciąć punkty, bo nie ma bezbłędnego rozwiązania, ale właściwie do końca dojechał. A może tylko kawałek ruszył, a może dojechał do tych zasadniczych trudności, ale też gdzieś się pomylił, to wszystko jest opisane. I w ten sposób możemy dawać punkty i, proszę Państwa, to się w gruncie rzeczy będzie dość dobrze dodawać między zadaniami. Wydaje mi się, że jest to pewna propozycja, która została zupełnie dobrze przyjęta. Powiedziałbym tak – o jakości tej propozycji świadczy to, że na wszystkich właściwie spotkaniach z nauczycielami matematyki, z tymi egzaminatorami, którzy mieli później oceniać według tej koncepcji, nie spotkaliśmy nigdy zasadniczego sprzeciwu. Dla nauczycieli matematyki było oczywiste, że najistotniejszą rzeczą w zadaniu jest odpowiedź na pytanie – czy zrobił to, czego od niego oczekiwano. Dyskusyjną kwestią mogło być ocenienie, co jest tą zasadniczą częścią zadania.

Chcę pokazać jedno zadanie, które szczególnie dokładnie analizowaliśmy i zobaczymy, że tam są sprawy dyskusyjne. Tak samo, jak w poprzednim systemie były dyskusyjne, tyle tylko, że nie było żadnej podstawy do zakwestionowania któregokolwiek rozwiązania. To jest autentyczne zadanie, które było na maturze za 5 punktów właśnie. Samochód jechał, a gdyby jechał szybciej, to by przyjechał wcześniej. Z jaką prędkością jechał? Proszę Państwa, o co chodzi w tym zadaniu? To zależy od autora zadania. O co by mi naprawdę chodziło, gdybym był autorem takiego zadania? Maturzysta będzie układał równania albo będzie od razu dążył do równania z jedną niewiadomą, albo najpierw ułoży układ równań (to jest układ równań kwadratowych), przejdzie do równania z jedną niewiadomą i je rozwiąże. Analizując te zadania, przejrzeliśmy bardzo dużo rzeczywistych prac maturalnych, kilkaset i to wyselekcjonowanych, wybraliśmy około 200 – o ile pamiętam – rozwiązań stwarzających pewne problemy i patrzyliśmy, jak to się przełoży na proponowany przez nas system. W którymś momencie doszliśmy do wniosku, że właściwie tak naprawdę te rozwiązania dzieliły się na pewne grupy – albo ktoś umiał rzeczywiście ułożyć równanie z jedną niewiadomą (potem robił różne rzeczy, albo umiał je rozwiązać, albo nie), albo nie umiał tego równania ułożyć. Zaproponowaliśmy, że to jest ten zasadniczy krok. Takie zadanie tekstowe daje się przede wszystkim po to, żeby sprawdzić, czy ktoś umie zbudować model matematyczny tej sytuacji, czy potrafi zmatematyzować, tzn. w tym wypadku ułożyć równanie i to takie równanie z jedną niewiadomą, które będzie umiał rozwiązać i którego rozwiązanie jest właściwie kwestią rutynową. Była, pamiętam, pewnego rodzaju konsternacja w zespole, czy żądać doprowadzenia do postaci już uporządkowanej, kwadratowej, czy zadowolić się równaniem po prostu z jedną niewiadomą. Nie wiem, co jest właściwsze. Uznaliśmy, że równanie z jedną niewiadomą to jest ten istotny powód, dla którego dajemy zadanie – to zbudowanie modelu. Zbudował go – tym modelem jest równanie – to znaczy, że pokonał te trudności, które przed nim przede wszystkim stawiamy. Reszta, to jest w pewnym sensie rutyna. Ułożenie równania nie jest rutyną, zwłaszcza dla ucznia. Tam można się pomylić, można niedobrze coś zrozumieć, można nie umieć. To nie jest tak rutynowa czynność jak rozwiązanie w sumie dość prostego równania. Oczywiście, byli tacy uczniowie, którzy nie rozwiązywali, wtedy myśmy mówili – to jeszcze dajemy ten czwarty punkt za doprowadzenie do równania kwadratowego. Trzy punkty były za ułożenie równania i dalej były stadia pośrednie. Wyróżnialiśmy, czy zdający ułożył to jedno równanie, czy ułożył układ równań. Bardzo dokładnie analizowaliśmy te prace, ale już ta granica trzech punktów wyznaczała, co będzie dalej.

Proszę Państwa, to jest w gruncie rzeczy ten główny pomysł, o którym chciałem mówić. W związku z tym, ta granica trzech punktów, to stwierdzenie: co to znaczy, że pokonał zasadnicze trudności zadania, wyznacza już w zasadzie prawie jednoznacznie podział na te pozostałe punkty. System czynnościowy nie jest zły, tyle tylko, że daliśmy definicję czynności, powiedzieliśmy, jak dzielimy zadania na te dwie główne części, a potem to jest już zupełnie jednoznaczne. Kiedy powiemy, gdzie jest ten zasadniczy podział, to widać, w jaki sposób będziemy dzielić dalej. Wobec tego ten podział i określenie tych czynności już w tym momencie stało się dość jasne. Pozostaje oczywiście to, co musi być zrobione. Taki pierwszy duży test nasz system przeszedł jesienią ubiegłego roku na próbnej maturze, gdzie były już trzy zadania oceniane w ten sposób. Chcę powiedzieć przy tej okazji parę słów o tym, jak wyglądała ta próbna matura. Wiadomo, próbną maturę się robi po to, żeby pokazać, jak będzie wyglądała prawdziwa matura. Są w zasadzie trzy rodzaje zadań. W pewnym momencie stwierdziliśmy, że są pewne takie umiejętności, które można sprawdzić w bardzo łatwy sposób – testem, np. takie zadanie, które pokazałem jako pierwsze, z tymi urnami. To się w pamięci robi i to można testem sprawdzić, do tego nie muszę mieć zadania tekstowego. Wobec tego, powiedzieliśmy sobie: pewną ilość tej wiedzy matematycznej sprawdza się po prostu testem wyboru ABCD. Trudno, wiemy, jakie są wady testu, nie będę ich tutaj teraz powtarzał. Wszędzie na świecie czy – powiedzmy – w wielu krajach na świecie robi się testy i jakoś się tego nie boją. Daliśmy pewną liczbę zadań krótkich. Maturzysta musi coś sam zrobić, ale jest to krótkie i łatwe. I tam również przyjęliśmy taki sposób. Mówiliśmy tak – dajemy zadania na to, ale pytamy, co jest tym najważniejszym krokiem. Jeżeli zadanie się składa z jednego kroku, tylko rozwiązał lub nie rozwiązał, to może ono pójść do testu. Natomiast, jeżeli ma taki etap pośredni, to wtedy dawaliśmy jeden punkt z dwóch. Na przykład takie zadanie – rozwiąż nierówność kwadratową. Proszę Państwa, co jest pokonaniem zasadniczych trudności w rozwiązaniu nierówności kwadratowej? Tu możemy się spierać. Jest wiele sposobów – egzaminowani mogą rysować parabolę lub nie rysować, mogą od razu napisać wynik, to nie jest trudne, ale na pewno pokonaniem zasadniczych trudności jest znalezienie pierwiastków. Jak nie znajdzie pierwiastków trójmianu, to nie rozwiąże tego zdania, a jeżeli znajdzie, to jest to bardzo istotny krok, a czy później te parabolę dobrze umieści, to jest ten drugi krok. Wobec tego powiedzieliśmy – najważniejszym krokiem jest znalezienie pierwiastków. Drugie takie zadanie – rozwiąż równanie trzeciego stopnia. Trzeba pamiętać, że na poziomie podstawowym nie ma żadnych wyrafinowanych metod rozwiązywania równań poza łatwym grupowaniem. Wobec tego zastanawialiśmy się, co jest tym istotnym krokiem, tym takim oderwaniem się od ziemi, który chcemy punktować. I była długa dyskusja, czy rozłożenie na czynniki, czy już zgrupowanie, które pozwala zrobić rozkład. Nie wiem, co jest lepsze. Widać, że albo chcemy być bardziej liberalni i wtedy za zgrupowanie damy jeden punkt, a możemy być ostrzejsi i damy dopiero za rozłożenie na czynniki. To jest kwestia polityki, a nie matematyki. Nie wiem, co byśmy chcieli uznać, ale oba rozwiązania są – w moim przekonaniu – sensowne. Albo uczeń pokazuje, że widzi drogę, którą podąża, czyli widzi dobre zgrupowanie i dobrze wyciąga przed nawias czy np. doprowadza do jakiejś postaci, albo dopiero rozłoży na czynniki. Jeżeli widzi, w dobrą stronę idzie i nawet nie dokończy, to już coś wie. W niektórych zadaniach tego nie robiliśmy, np. w prostszym zadaniu geometrycznym na dowodzenie. Naprawdę nie wiem, co tutaj wyróżnić jako tę czynność. Było to po prostu zadanie za dwa punkty. Dopuszczaliśmy możliwość taką, że zadanie mogło być rozwiązywane analitycznie i wtedy dobre umieszczenie w układzie współrzędnych było traktowane właśnie jako połowa rozwiązania, jako pokonanie tych zasadniczych trudności. Reszta to były obliczenia.

Proszę Państwa, taka jest ta koncepcja. Wydaje się, że spotkała się ona z dobrym przyjęciem wśród tych osób, które będą najbardziej nią zainteresowane, tzn. wśród egzaminatorów. I wydaje się, że ta metoda będzie przenikała do ludzi, bo został opublikowany przez Centralną Komisję Edukacyjną długi tekst o tym, jak była oceniana próbna matura. To jest trzydzieści kilka stron z podanymi schematami oceniania, to przeniknie do szkoły. Przeniknie informacja, że to co jest najważniejsze, to jest odpowiedź na pytanie, czy zadanie zostało rozwiązane. Wydaje się, że to jest to, do czego powinniśmy dążyć, to że dla matematyka tą rzeczą oczywistą, tą jedyną słuszną na świecie jest odpowiedź na pytanie – czy uczeń rozwiązał zadanie, czy nie rozwiązał i co to naprawdę znaczy w każdym konkretnym przypadku.

Proszę Państwa, to jest mniej więcej tyle, ile chciałem powiedzieć o tym systemie holistycznym. Dziękuję.

DYSKUSJA

Profesor Zbigniew Semadeni (Uniwersytet Warszawski) – Była taka dość oczywista zasada przy ocenianiu na studiach, że za rozwiązanie trudniejszego zadania daje się więcej punktów. Potem po latach zacząłem w to wątpić. Najważniejsze różnicowanie na egzaminie – przynajmniej z punktu widzenia studenta – to niedostateczny czy dostateczny, zdał czy nie zdał. Kwestia, na jaki stopień zdał, bywa mniej ważna, to dopiero liczy się w perspektywie dyplomu. Otóż stwierdziłem, że jak student nie rozwiązał trudnego zadania, to się nic nie stało, ale jak zadanie jest banalne, a on go nie umie rozwiązać, to to ujawnia zasadniczy brak i powinno się mu postawić niedostateczny. Zacząłem więc zmieniać strategię – to zadania najłatwiejsze miewały najwięcej punktów, bo wtedy brak rozwiązania lub błędne rozwiązanie był dla mnie najważniejszą informacją.

Bardzo mi się podoba prezentowany tu projekt, żeby oceniane było to, czy zdający dokonał istotnego kroku do rozwiązania. Z tego wynika następna kwestia: zadanie powinno mieć tylko jeden taki istotny krok. W swoim czasie przy układaniu zestawów maturalnych – musiały bodajże być trzy zadania, a kompetencji do sprawdzania było dużo więcej – była tendencja wsadzania do jednego zadania po ileś kompetencji. Na przykład, było równanie wykładnicze; jak się pogrupowało potęgi, to pojawiało się równanie kwadratowe, a gdy się obliczyło deltę, pojawiało się coś dotyczącego następnej kompetencji itd. W sumie takie zadanie było dla mnie kompletną bzdurą.

Z czego to się brało? Otóż niejednokrotnie studenci chcieli się ode mnie dowiedzieć, ile zadań będzie na egzaminie. Pytałem się ich wtedy: Co wam da ta informacja? Czy wolicie mieć trzy trudne zadania, czy siedem łatwiejszych? Natychmiast odpowiadali, że wolą 7 łatwiejszych.

Skąd się brało takie nastawienie społeczeństwa i władz oświatowych? Było gdzieś głęboko zakodowane przekonanie, że jak jest mniej słów, to są mniejsze wymagania. Dlatego też na maturze nie mogło być 7 zadań, mogły być tylko trzy. Ta polityka była widoczna przed laty w Instytucie Programów Szkolnych, gdy krytykowano nadmiar materiału z matematyki. Co robił IPS? Skreślano pewne słowa, pewne zwroty. Oczywiście, każdy nauczyciel i tak wiedział, że to trzeba przerobić, bo zapisany był następny temat, który tego wymagał.

Zasadnicza różnica między podstawami z czasów ministra Handkego z 1999 r. a podstawami prof. Marciniaka polega na tym, że w nowych podstawach jest znacznie więcej słów i więcej szczegółów. W pierwszej chwili może się wydawać, że jest więcej materiału, jednakże – moim zdaniem – to właśnie chroni ucznia, gdyż wtedy jasno widać, czego już nie można dawać, bo wystaje poza to, co jest wymagane. Gdy było jedynie ogólnikowe sformułowanie, w wielu podręczników zbytnio to rozszerzano.

Docent dr hab. Wojciech Guzicki – Rzeczywiście na próbnej maturze nie było takich zadań rozbudowanych. Bardzo wyraźnie wyodrębniliśmy te umiejętności, które mogły być sprawdzone, odizolowane od innego kontekstu. Takie pojedyncze umiejętności były przerzucone do testu. Podobnie, takie dość proste zadania do tych krótkich zadań dwupunktowych. Parę razy pytano mnie, dlaczego najtrudniejsze zadanie, którego rozwiązywalność była 1%, tzn. to zadanie geometryczne na dowodzenie, miało tylko dwa punkty. Odpowiedź – bo w razie czego tylko dwa punkty stracą. Rzeczywiście, zadanie trudniejsze powinno mieć mniej punktów, żeby mniej tracili, ale być może wtedy należy dać więcej zadań. I były dwa zadania, które się zaczynały od słów: „udowodnij” czy „wykaż, że” i to są te trudniejsze. Ich rozwiązywalność była rzeczywiście dużo niższa. Natomiast, to łączenie różnych tematów, proszę Państwa pamiętam, jak byłem jeszcze w szkole ułożyłem takie zadanie z fizyki o spadochroniarzu, który wyskoczył z samolotu, przez roztargnienie bez spadochronu i jak tak trzasnął o ziemię – tam były podane współczynniki – to do jakiej temperatury ogrzeje się to, co z niego zostanie przy przemianie energii, tej potencjalnej na kinetyczną, tej na cieplną itd. Proszę Państwa, tam się udało umieścić tylko parę tematów z fizyki, ale później rozbudowywaliśmy to zadanie. Już go nie pamiętam do końca, ale się zmieściła cała fizyka w jednym. Zaczęło się od tego jednego, biednego roztargnionego spadochroniarza. Widziałem takie zadania, w którym było równanie wykładnicze, a jednym współczynnikiem, podstawą było prawdopodobieństwo czegoś, a inny współczynnik, to był mniejszy pierwiastek trójmianu kwadratowego i coś tam jeszcze, jakiś sinus kąta, i wszystko było w jednym zadaniu. Proszę Państwa, rzeczywiście takich zadań nie ma. Musi być ten jeden punkt i to chyba nam się udało uzyskać, że w każdym zadaniu był widoczny ten moment, co jest tak naprawdę najważniejsze, w jakim celu to zadanie zostało dane. Zobaczymy, jak to będzie na prawdziwej maturze.

Głos z sali – Czytałam tekst, w którym była przedstawiona pięciostopniowa skala oceniania, prawie identyczna z tą skalą. Moim studentom, to się nie podoba. Moi studenci są przyszłymi nauczycielami matematyki. Rok temu miałam z nimi seminarium z rozwiązywania zadań – tak to się u nas nazywa – i robiliśmy na nim zadania z matury. Im się taki system nie podobał. Wręcz dali mi odczuć, że się bardzo cieszą, że wychodzą spod moich skrzydeł i będą mogli oceniać tak, jak to robi matura. Dlatego pytam się, ile osób wie o tym sposobie oceniania i to akceptuje, ponieważ wygląda na to, że pokolenie wychowane inaczej, myśli inaczej.

Docent dr hab. Wojciech Guzicki – Myślę, że potrzeba parę lat.

Profesor Zbigniew Marciniak – A ja myślę, że odpowiedź jest bardzo prosta: tacy ludzie nie będą egzaminatorami. To jest kwestia szkolenia i weryfikacji umiejętności, a także profesjonalnie przygotowanego schematu oceniania. Ktoś, kto próbuje narzucić swój sposób oceniania, inny niż przyjęty centralnie, nie nadaje się na egzaminatora. Podstawową zasadą egzaminu centralnego jest bowiem to, by takie same błędy, obojętne gdzie popełnione – w Przemyślu czy Szczecinie – były tak samo ocenione.

Docent dr hab. Wojciech Guzicki – Dodałbym jeszcze jedną rzecz. Rzeczywiście, jeżeli oni byli przez parę lat jeszcze w szkole przygotowywani do innego systemu oceniania, w nim się wychowali, to będą do niego przywiązani. Myślę, że ci, którzy będą zdawać maturę tegoroczną i następne roczniki, będą przygotowywani do trochę innego myślenia i łatwiej nowy sposób zaakceptują. Tak, jak powiedziałem, na większości spotkań, zwłaszcza z egzaminatorami, na szkoleniach egzaminatorów spotykaliśmy się raczej z dobrym przyjęciem tego pomysłu. Egzaminatorów w Polsce jest, łagodnie licząc, ponad 8 tys. To są ci najlepsi nauczyciele, którzy będą oceniać. Oni będą przekazywali to następnym, więc powiedziałbym, jeżeli już kilka tysięcy tych najbardziej reprezentatywnych nauczycieli ten system zna i większość jednak akceptowała tę główną myśl, to może nie jest tak źle. Specjalnie bym się tym nie przejmował. Natomiast, rzeczywiście, to co tutaj powiedział Pan Marciniak, jeżeli ktoś za dużo myśli przy ocenianiu, a nie stosuje się do schematu, to się nie nadaje. Byłbym bardzo złym egzaminatorem, bo sobie odpuszczam różne rzeczy i dopowiadam to, czego nie ma. Nie nadaję się do tego. Są ludzie, którzy się nadają, są tacy, którzy się nie nadają. Ja wiem, jakie są moje ograniczenia. Mnie się wydaje, że ten tekst o próbnej maturze w Internecie mógł być czytany przez nauczycieli. Nie wiem, czy jest czytany. Wcześniej czy później on się przebije do świadomości i jeżeli ten system się utrzyma, to myślę, że za parę lat będzie zupełnie naturalnym systemem, gdyż mnie się wydaje, że jest on naturalny. To jest naturalne, że jak układam zadanie, to muszę powiedzieć, o co mi naprawdę w tym zadaniu chodzi – tak mi się przynajmniej wydaje.

Pan Włodzimierz Zielicz – Akurat jestem fizykiem, ale mam pytanie innej natury. Pan proponuje jakby system sterowania egzaminatorami, a w moim przekonaniu, to kwestia tego systemu, jego szczegółowości, nie jest funkcją jakości samego systemu – zresztą Pan na to pytanie częściowo odpowiedział – tylko systemu weryfikacji merytorycznej jakości matematycznej egzaminatorów. Jeden system – jak obecnie, gdy takiej weryfikacji brak – wymaga, żeby ludziom podać bardzo dokładnie instrukcje, inaczej zrobią po swojemu i bardzo różnie, a inny system, przy lepszych merytorycznie egzaminatorach, powoduje, że można im pewne rzeczy tylko zasugerować albo zasygnalizować. I tu jest problem, Polska się dzieli na Polskę A i B, i np. na Podlasiu mogą być trochę inni nauczyciele matematyki – ogólnie oczywiście – niż np. w Małopolsce. Zdarza się też dość często, że matury sprawdzają nauczyciele z niższych poziomów kształcenia. Co Pan o tym sądzi?

Docent dr hab. Wojciech Guzicki – Różnic regionalnych nie spodziewałbym się, natomiast myślę, że Pan ma istotną rację, rzeczywiście znacznie uszczegółowiliśmy ten schemat. To, co pokazywałem tutaj, to były schematy mieszczące się w kilku linijkach do zadania, natomiast schematy do próbnej matury, do oceniania 9 zadań, liczyły ponad 30 stron tekstu i 60 stron przykładowych rozwiązań uczniowskich, ilustrujących te największe problemy oceniania. Tak więc cały ten materiał do szkolenia, na podstawie którego były robione szkolenia egzaminatorów, liczył ponad 90 stron – w odróżnieniu od kilku stron w poprzednich maturach. Poszliśmy więc bardzo daleko w uszczegółowieniu. Było bardzo wyraźnie napisane przy każdym możliwym sposobie rozwiązania, co dokładnie musi być w pracy, żeby odpowiednie punkty przyznać. Wręcz do tego stopnia, jakie napisy mają być w tej pracy i nawet były różnego rodzaju błędne niedokończone napisy, jak należy je interpretować. Jeszcze jedna bardzo ważna rzecz. W większości Okręgowych Komisji, większość egzaminatorów wybrała sprawdzanie próbnej matury zadaniami, a nie całymi arkuszami. Wobec czego, egzaminator specjalizował się w trzech zadaniach i te trzy zadania, te wszystkie rozwiązania, mógł niezwykle dokładnie przeczytać i ich się nauczyć. To też była zmiana w stosunku do poprzednich matur.

PRACA Z UCZNIEM UZDOLNIONYM MATEMATYCZNIE[1]

EDMUND PUCZYŁOWSKI

Uniwersytet Warszawski
e-mail: e.puczylowski@mimuw.edu.pl

1. Wstęp

Coraz bardziej przebija się do społecznej świadomości, przynajmniej środowisk związanych z szeroko rozumianą działalnością edukacyjną, potrzeba zwrócenia baczniejszej uwagi na pracę z uczniem zdolnym, a najlepiej stworzenia spójnego systemu pracy z takim uczniem. Transformacja ustrojowa przyniosła znaczny wzrost liczby młodych ludzi uczących się w szkołach ponadgimnazjalnych i studiujących na różnego typu uczelniach. Za tym wzrostem ilości niekonicznie jednak podąża poziom zdobywanego wykształcenia. Musi on bowiem być dostosowany do możliwości wyższego odsetka uczącej się młodzieży, które siłą rzeczy są mniejsze. Po stworzeniu możliwości zdobywania średniego i wyższego wykształcenia szerokim rzeszom młodych ludzi nadchodzi pora stworzenia lepszych szans rozwoju młodzieży, która posiada duży intelektualny potencjał. Będzie to niewątpliwie korzystne społecznie i edukacyjnie.

Nie można powiedzieć, że obecnie nie jest prowadzona praca z uczniem zdolnym. Wiąże się ona głównie, bezpośrednio lub pośrednio, z olimpiadami przedmiotowymi. Olimpiady, to genialny wynalazek, który już na trwałe wpisał się w edukacyjny krajobraz i, miejmy nadzieję, że w nim pozostanie. Adresowane są one jednak (przynajmniej te najbardziej prestiżowe i o najwyższym poziomie weryfikowanym na zawodach międzynarodowych) do najbardziej elitarnej intelektualnie części młodzieży. Oddziaływanie olimpiad jest

[1] Opracowanie jest rozszerzoną wersją referatu wygłoszonego podczas konferencji „Strategia nauczania matematyki w Polsce – wdrożenie nowej podstawy programowej", która odbyła się w dniach 28-29.04.2010 r. w Instytucie Problemów Współczesnej Cywilizacji im. Marka Dietricha.

bardzo znaczące, ale jednak ma ograniczony charakter. Wielu uczniów i nauczycieli nawet nie próbuje się nimi interesować, nie widząc większych szans, by sprostać stawianym w nich wymaganiom. Organizowanych jest wiele różnych konkursów, imprez popularyzatorskich czy kółek zainteresowań, ale jedynie część z nich ma systematyczny charakter. Trudno w tym wszystkim dostrzec jakiś system, chociaż te wszystkie działania i inicjatywy pokazują z jednej strony potrzebę żywszych i wyżej kwalifikowanych działań edukacyjnych niż oferuje szkolna rutyna, a z drugiej – sporą gotowość wielu nauczycieli do podjęcia takiej działalności. Skoro jest potencjał i zapotrzebowanie (są także inne przesłanki, o których powiem nieco więcej później) do podjęcia szerszej pracy z uczniem zdolnym, to może warto próbować tworzyć system, który taką pracę ułatwi. I takie próby są w środowisku matematycznym od pewnego czasu podejmowane. Jak się wydaje, tworzy się „masa krytyczna” inicjatyw i doświadczeń, która stwarza nadzieje na wykonanie jakościowego postępu. Naszkicujemy tutaj pewien zarys tego, jak mógłby taki system wyglądać.

Wszystkie zawarte w tym opracowaniu sugestie, uwagi i propozycje, mimo że mają ogólny charakter, bazują na bardzo konkretnych doświadczeniach uzyskanych w trakcie realizacji różnych przedsięwzięć, w których autor opracowania uczestniczył. Należały do nich:

- działalność w Olimpiadzie Matematycznej (OM) i różne innowacyjne rozwiązania, które między innymi doprowadziły do zorganizowania Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG). Podstawą wielu nowych inicjatyw i ich wdrożenia było powołanie i aktywne funkcjonowanie Nauczycielskiego Komitetu Doradczego OM, złożonego z nauczycieli, wychowawców wielu olimpijczyków;
- powołanie i pięcioletnie funkcjonowanie OMG. Jak się wydaje olimpiada ta, mimo stosunkowo krótkiego okresu istnienia, już bardzo silnie zakorzeniła się w szkolnej rzeczywistości i uzyskała wysoki prestiż w środowisku. Potwierdzają to wysokie osiągniecia uczestników OMG w OM, powołanie w ślad za OMG Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów, przymiarki do powołania nowych olimpiad gimnazjalnych oraz wyniki badań ankietowych nauczycieli;
- powołanie, organizacja i funkcjonowanie Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (SEM). Stowarzyszenie to zostało powołane dwa lata temu po dość długim okresie przygotowań, zarówno organizacyjnych jak i formalno-prawnych. W tej chwili liczy już ponad 100 członków, z których większość prowadzi pracę z uczniami matematycznie uzdolnionymi. Jest to naturalny ośrodek konsolidacji takich osób (można też powiedzieć, że powołanie stowarzyszenia było efektem konsolidacji zapo-

częściowanej powołaniem Nauczycielskiego Komitetu Doradczego OM). Mimo tak krótkiego okresu istnienia SEM, ma na swoim koncie wiele dokonań (działalność wydawnicza, prowadzenie OM i OMG, konferencje, kółka, odczyty, itp.);

- udział w realizacji grantu „Strategia nauczania matematyki w Polsce". Więcej informacji na ten temat zawartych jest w dalszej części opracowania;
- przygotowanie projektu unijnego, którego celem było zorganizowanie pewnych form pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie. Był to projekt bardzo szeroki i ambitny, którego opracowaniu i różnym uzgodnieniom poświęcono olbrzymią ilość czasu i wysiłku. Nie został zakwalifikowany do realizacji. Jednym z powodów było to, że zakładał on wsparcie organizacji OMG, co recenzenci uznawali za zadanie Ministerstwa Edukacji Narodowej nie kwalifikujące się do finansowania ze środków unijnych. Być może też nieufność budził bardzo krótki okres działalności SEM, które ten projekt firmowało;
- kilkuletnia działalność w ramach Oddziału Białostockiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego, gdzie w tym czasie zostało podjętych wiele systematycznych działań dotyczących pracy z uczniem zdolnym (został zorganizowany, funkcjonujący do dzisiaj przy Politechnice Białostockiej, konkurs „zaplecza" olimpijskiego; bogata wystawa matematyczna, która już niestety nie istnieje; cykliczne imprezy pod nazwą Dni Matematyki w Białymstoku; odczyty, kółka, itp).

Większość uwag zawartych w tym opracowaniu dotyczy nie tylko matematyki, ale również innych obszarów edukacyjnej aktywności. Matematyka, ze względu na swoją dość powszechnie uznawaną uniwersalność, jest może nieco wyróżniona. Ma też oczywiście, tak jak każda inna dziedzina, swoją specyfikę, która objawia się na poziomie konkretnych rozwiązań i działań. Jednak na pozionie ogólnym zasady są podobne.

2. Przesłanki potrzeb stworzenia systemu pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie

O pewnych przesłankach wspomniałem już wyżej. Są jednak i inne, o których teraz krótko powiem.

(a) W przedstawionych w roku 2003 wynikach badania OECD PISA (Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów) zasygnalizowany został „problem górnej ćwiartki", czyli najlepszych polskich uczniów, którzy uzyskali relatywnie słabsze wyniki niż analogiczna grupa z innych krajów. W roku 2003 problem ten zarysował się najsilniej w matematyce. W dokumencie podsumowującym wyniki badania stwierdzono:

> „*Rozwijanie umiejętności samodzielnego myślenia, rozumowania naukowego, modelowania i rozumowania matematycznego, formułowania hipotez, zwięzłego zapisania wniosków, dostrzegania alternatywnych rozwiązań problemu, stanowi piętę achillesową polskiej oświaty.*
>
> *Dalsze ćwiczenie algorytmów nie daje szansy na istotne pogłębienie umiejętności matematycznych. Drogą autentycznej poprawy jest rozwijanie umiejętności modelowania i rozumowania matematycznego. Wymaga to zasadniczych zmian w metodach pracy z uczniami.*"

Można oczywiście zadać pytanie: co praca z uczniami uzdolnionymi matematycznie, a więc pewną tylko grupą najbardziej zainteresowanych matematyką uczniów, ma wspólnego z zarysowanym wyżej problemem dotyczącym ogółu młodzieży. Otóż, stworzenie sprawnego systemu pracy z uczniem zdolnym będzie silnie oddziaływało na sposób nauczania matematyki wszystkich uczniów. Olimpiady, mimo ich dużej elitarności, są doskonałym wzorcem tego, co to jest kwalifikowana matematyka szkolna. Szerszy, na wysokim poziomie merytorycznym, system pracy z uczniem zdolnym będzie miał też niewątpliwie szersze oddziaływanie. Nie ulega chyba wątpliwości, ku jakiemu sposobowi nauczania będzie młodzież się skłaniała (może ku utrapieniu pewnych nauczycieli, nie wspominając o urzędnikach oświatowych): żywemu i interesującemu, czy schematycznemu i opartemu na algorytmach. Trudno bowim sobie wyobrazić, by młody, z otwartą głową człowiek (a młodzi tacy są), mając za zadanie rozwiązanie równania $(x-7)(x-1)=0$, preferował wymnażanie wyrażenia po lewej stronie i liczenie pierwiastków otrzymanego wielomianu drugiego stopnia za pomocą delty. Niestety dzisiaj taki sposób jest wpajany uczniom (podany przykład nie jest sztucznie wymyślony, a wzięty z pracy studenta). Można być pewnym, że pojawienie się nauczycieli z pasją, którzy przyciągają zainteresowanie najzdolniejszych uczniów, będzie też bodźcem dla innych, by im dorównać lub przynajmniej pracować z większym zaangażowaniem. Może to pomóc w stworzeniu systemu wynagradzania nauczycieli w zależności od jakości ich pracy. Można też mieć nadzieję, że szerzej prowadzona w szkole praca z uczniami uzdolnionymi zaowocuje w dalszej perspektywie modyfikacją programów nauczania (więcej kreatywności, a mniej algorytmów) i sposobów przygotowania na uczelniach przyszłych nauczycieli. Być może szansa włączenia się w ciekawszą niż oferuje szkolna rutyna pracę z uczniem zdolnym zachęci do podjęcia pracy w szkole szersze grono zdolnych absolwentów uczelni i przyczyni się do odwrócenia trendu negatywnej selekcji do zawodu nauczyciela.

(b) W ostatnich latach daje się zauważyć wyraźne obniżanie zainteresowania uczniów wyborem studiów na kierunkach, na których matematyka odgrywa istotną rolę. To zjawisko obserwowane jest także w wielu innych krajach, gdzie przybrało ono znacznie szersze rozmiary. Różne są pewnie tego przyczyny i różnie próbuje się sytuację naprawić. U nas wierzy się, że poprawi się ona po wprowadzeniu obowiązkowej matury z matematyki. Doraźnie mają zamortyzować to zjawisko tzw. studia zamawiane, ale dotychczasowe doświadczenia związane z ich jakością budzą mieszane uczucia. Ciekawe byłoby wnikliwe zbadanie efektów, jakie one przynoszą. Ciekawe też byłoby zbadanie efektów akcji propogandowej zrealizowanej w serii filmów reklamujących użyteczność matematyki. Tutaj też zdania są podzielone.

(c) Uczelnie powszechnie sygnalizują obniżenie poziomu wiedzy i sprawności matematycznej uczniów podejmujących studia na kierunkach matematyczno-przyrodniczych i technicznych. Narzekania na poziom przygotowania uczniów są powszechne nawet na kierunkach, na których jest nadmiar kandydatów. Przy jakiejś okazji, rektor jednej z politechnik powiedział, że na jego uczelni przyjęto na budownictwo tylko kandydatów z bardzo dobrymi wynikami na maturze, a mimo to, nie ma tam tak dobrych studentów jak wcześniej. Niektóre uczelnie czy kierunki organizują różne zajęcia czy konkursy, które mają zachęcić bardziej aktywnych i zdolnych uczniów do podjęcia studiów właśnie u nich. Te uczelnie czy też kierunki są zainteresowane współpracą z osobami, które pracują z uczniami zdolnymi. Zaglądając na stronę internetową SEM pod adres www.sem.edu.pl, można zobaczyć tego typu współpracę Politechniki Warszawskiej z SEM. Wydaje się, że z biegiem czasu zjawisko to będzie się rozszerzało.

(d) Coraz wyraźniej się zaznacza różnicowanie oceny szkół i zainteresowanie rodziców, by umieszczać swoje dzieci w tych szkołach, które są uważane za najlepsze. Dotyczy to już nawet szkół podstawowych. Tworzone są różnego rodzaju rankingi, w których istotnym kryterium są np. wyniki uczniów w olimpiadach czy innych konkursach, jak również to, w jakich uczelniach i na jakich kierunkach studiują ich absolwenci. Szkoły zaczynają ze sobą konkurować pod względem jakości kształcenia, gdzie bierze się pod uwagę nie tylko to, jak dobrze czy skutecznie jest realizowany program nauczania, ale i to, co szkoła oferuje ponadto. Można dyskutować, czy ten trend jest dobry, czy zły, jak również i o tym, czy to dobrze, że pojawiają się szkoły wyspecjalizowane (nazywane stajniami) w przygotowywaniu uczniów do udziału w tej czy innej olimpiadzie. Jest to jednak istniejące zjawisko. Organizowane są zajęcia dla najzdolniejszych uczniów przez różne instytucje (dla przykładu „Mazowieckie talenty" w województwie mazowieckim) czy nauczycieli, którzy interesują się pracą z uzdolnionymi uczniami (np. „Odkrywamy matematykę" przez Mazowieckie Centrum Doskonalenia Nauczycieli). Wskazuje to na społeczne zapotrzebowanie na tego typu działalność.

3. Kto to jest uczeń uzdolniony matematycznie?

Zanim się zacznie mówić o tworzeniu systemu pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie, należy próbować wyraźniej określić, jakiego ucznia ma się na myśli. Trudno oczywiście jest określić, co to są czy na czym polegają uzdolnienia matematyczne (jak i każde inne zresztą). Problem ten bierze się stąd, że nie da się precyzyjnie powiedzieć, czym jest matematyka. Niektórzy mówią, że matematyką jest to, co robią matematycy. Oni to czują i oceniają, co jest bardziej, co mniej wartościowe, nowatorskie czy rutynowe, intrygujące czy nieciekawe (chociaż oczywiście też się spierają i nie zawsze są w doraźnych ocenach zgodni, pozostawiając ostateczne rozstrzygnięcia czasowi, który też – jak wiadomo – nie zawsze jest sprawiedliwy). Również – i tu nie ma wyboru – ocenę zdolności czy też talentu matematycznego należy pozostawić matematykom (chociaż na pewno nie uniknie się prób „obiektywnego" oceniania urzędniczego) i to tym, którzy mają autentyczne sukcesy w pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie. To oni powinni przygotować odpowiednie narzędzia do tego służące oraz zaprogramować i wdrożyć system pracy z uczniem zdolnym, który by zachęcał do pracy uczniów o odpowiednich predyspozycjach. To, jak szerokie grono utalentowanej młodzieży zostanie w ten sposób wyłonione, będzie zależało od wydolności systemu. Innymi słowy, budowanie systemu pracy z uczniem zdolnym to w gruncie rzeczy przygotowywanie i organizowanie nauczycieli, którzy tę pracę będą realizowali oraz tworzenie odpowiednich narzędzi dla tej realizacji. Wzorcem, od którego należy zacząć, jest to co już istnieje i dobrze się sprawdza, a więc od olimpiad i doświadczeń osób, które je organizują. To należy obudowywać i rozwijać, wprowadzając stopniowo nowe elementy i rekrutując dalszych wykonawców. Stopniowo system ten powinien obejmować coraz więcej uczniów, nie tylko tych najbardziej utalentowanych, których wyłaniają olimpiady (chociaż też nie wszystkich), ale też ponadprzeciętnie matematycznie sprawnych i kreatywnych, chociaż może zainteresowanych matematyką raczej jako narzędziem, które może być im w przyszłości przydatne.

4. Główne założenia tworzenia systemu

4.1. Konsolidacja

System (niekoniecznie zresztą jeden, bo każdy chętny podmiot organizacyjny może tworzyć swój) powinien być tworzony oddolnie, a nie przez administrację oświatową i oparty, przynajmniej w początkowej fazie tworzenia, na konsolidacji środowisk i osób, które zajmują się już z powodzeniem pracą z uczniem zdolnym. Należy więc zacząć od konsolidacji i samoorganizacji środowiska osób już z powodzeniem taką działalność prowadzących. To środowisko powinno stopniowo rozszerzać swoją działalność oraz przyciągać i włączać nowe osoby. Proces ten powinien być powolny, nastawiony na wysoką jakość oraz ciągłą weryfikację efektów pracy. Gdyby udało się doprowadzić do tego, by średnio w każdym powiecie był jeden zapalony, kompetentny i efektywny nauczyciel, dla którego praca z uczniem zdolnym na wysokim poziomie jest pasją, to już byłoby to osiągnięcie.

4.2. Mierniki

Należy wypracowywać mierniki osiągnięć. Takim miernikiem w przypadku OM jest niewątpliwie to, jak wypadają polscy uczniowie na zawodach międzynarodowych, ale też liczba uczestników i prezentowany przez uczniów poziom przy kwalifikacjach do kolejnych stopni, dalsze losy olimpijczyków oraz ocena ich sprawności przez uczelnie, na których podejmą studia (to jest również ważne dla czuwania nad właściwą modyfikacją programu OM i doborem zadań). W przypadku OMG należałoby dążyć do zorganizowania zawodów międzynarodowych. Podstawowym miernikiem mogłyby jednak być sukcesy uczestników OMG w OM. Ogólna zasada powinna być taka, że podejmując jakikolwiek rodzaj działalności, należy bardzo wyraźnie określić jej cele w obrębie systemu i ustalić odpowiednie mierniki, za pomocą których będą werfikowane efekty. Nie należy jednak tych mierników nadmiernie fetyszyzować, a traktować elastycznie. Pamiętać bowiem należy, że mierniki mają służyć lepszej pracy, a nie praca lepszemu wypełnianiu mierników. Jednak konieczność uświadamiania „po co” jest zasadnicza, bo natychmiast ustawia zadanie jako element szerszej układanki i ułatwia, a nawet wymusza, odpowiedzialną organizację. Ważna jest kompleksowość działań i to, by efekty już przeprowadzonych służyły następnym. Dla przykładu, udział w OMG przygotowuje do udziału w OM, a najlepsi otrzymują też przywilej wyboru szkoły ponadgimnazjalnej, w której najlepiej będą mogli rozwijać swoje zaineresowania. Ważne jest, by np. nie pozostać tylko na poziomie popularyzacji i działań pokazujących uczniom „jak fajna jest matematyka", aby w ślad za rozbudzonym zainteresowaniem zaproponować zajęcia, na których zainteresowany uczeń będzie mógł zweryfikować, czy naprawdę ma matematyczne zdolności i czy chce je rozwijać. Dla tych, co chcą, należałoby zaproponować zajęcia, które by w tym pomagały.

Wiele podejmowanych obecnie przedsięwzięć, mimo że pochłaniają one wiele energii i wysiłku organizatorów, to trochę sztuka dla sztuki. Zorganizowanie np. co pewien czas odczytu na pewno nie jest szkodliwe, ale wymierne tego efekty są raczej skromne. Podobnie, gdy organizuje się konkurs, wyłania zwycięzców, rozdaje nagrody i na tym kończy, ma to oczywiście pewną wartość, ale mogłaby być ona większa, gdyby konkurs miał przemyślaną kontynuację.

4.3. Badania i monitorowanie

Aby właściwie zorganizować efektywny system pracy z uczniem zdolnym, należy wnikliwie i możliwie obiektywnie rozpoznać sytuację: potencjalne potrzeby, możliwości i skuteczność zamierzonych działań. Konieczne jest więc przeprowadzenie różnych badań poprzedzających wdrażanie kolejnych elementów systemu, a także monitorowanie efektów działań i bieżące ich korygowanie. Badania powinny dotyczyć potencjału organizacyjnego, zapotrzebowania, oczekiwań potencjalnych beneficjentów itp. Powinno też być prowadzone „rozpoznanie bojem", tzn. każde nowe działanie powinno być rozbudowywane stopniowo i na bieżąco korygowane. Planowane szersze działania powinny najpierw być podjęte pilotażowo i lokalnie.

4.4. Narzędzia

Należy stopniowo przygotowywać odpowiednie narzędzia do pracy z uczniem zdolnym: materiały do popularyzacji, metody przygotowywania i wykorzystywania różnych pomocy dydaktycznych (eksponaty wystawowe, plakaty edukacyjne, materiały elektroniczne itp.), materiały dydaktyczne (zbiory zadań, artykuły, materiały elektroniczne), schematy organizacji kółek, warsztatów i konferencji. Należy też powoływać zespoły zarządzające i wykonujące poszczególne działania oraz ustalać, weryfikować i korygować schematy ich funkcjonowania.

4.5. Ścieżka edukacyjna ucznia zdolnego

Bardzo istotnym powinno być stworzenie wzorcowej „ścieżki” edukacyjnej ucznia zdolnego. Chodziłoby o wyobrażenie i zaplanowanie drogi rozwoju takiego ucznia, którą można wyrazić hasłem: popularyzacja-aktywizacja-edukacja. Mianowicie, należałoby zaplanować system działań, który by najpierw pozwolił wyszukać uczniów uzdolnionych, zachęcił ich do zainteresowania żywą matematyką i wreszcie stworzył kwalifikowane możliwości edukacyjne rozwijania matematycznych możliwości tych uczniów. Należałoby stworzyć system różnych działań skierowanych do uczniów już w szkole podstawowej, które by pokazywały atrakcyjność matematyki i jej użyteczność. Tę rolę mogą znakomicie spełniać wystawy matematyczne (zostało to już wypraktykowane w niektórych ze wspomnianych we wstępie działaniach i są konkretne pomysły, jak można to udoskonalić i rozwinąć). Tę działalność typu „intrygowanie i zaciekawianie” należałoby przedłużyć poprzez inne formy popularyzacji matematyki (pokazy, odczyty, plakaty edukacyjne) i jednocześnie poprzez odpowiednie konkursy wyławiać uczniów o ponadprzeciętnych możliwościach i „podnosić poprzeczkę”, czyli zachęcać do udziału w konkursach coraz bardziej kwalifikowanych i coraz bardziej „wymuszających” podnoszenie matematycznej sprawności oraz do udziału w dobrze zorganizowanych i adresowanych zajęciach. Te wszystkie formy aktywności i działań są już znane i przetestowane, chociaż oczywiście należy je ulepszać, wzbogacać i upowszechniać.

5. Potencjalne kierunki działań

Wyróżnimy te kierunki tylko hasłowo, w punktach, ograniczając się praktycznie do tego co standardowe. Szczegółowe omówienie każdego z tych kierunków z uwzględnieniem innowacyjnych pomysłów, częściowo już przetestowanych w trakcie realizacji wspomnianych we wstępie działań, wymagałoby odrębnego obszernego opracowania. Należałoby tutaj w szczególności uwzględniać zakres każdego z działań, gdyż należy uwzględniać różne problemy, w zależności od tego, czy mają one obejmować szkołę, gminę czy cały kraj.

Ogólnie, powinny być zasadnicze dwa – chociaż przenikające się i kompatybilne – kierunki: skierowany do nauczycieli i skierowany bezpośrednio do uczniów.

Podstawowe obszary działalności to:

- popularyzacja (główny cel to rozbudzanie zainteresowania matematyką i jej zastosowaniami oraz zachęcanie uczniów do rozwijania matema-

tycznych uzdolnień. Cel niejako uboczny, to poprawianie nienajlepszego wizerunku matematyki w społeczeństwie);
- organizacja konkursów (główny cel, to sprawdzanie efektów pracy, selekcja do kolejnych etapów działań oraz tworzenie okazji do wykazania się młodzieży jej osiągnięciami w konkurencji z kolegami);
- organizacja kółek, warsztatów, wykładów, szkoleń i konferencji;
- działalność wydawnicza;
- utworzenie portalu internetowego ucznia zdolnego.

A także:

(a) skierowane do nauczycieli:
- konsolidacja środowiska nauczycieli, którzy zajmują się popularyzacją matematyki i pracą z uczniem zdolnym;
- rozszerzanie tego środowiska (stopniowe rozbudowywanie „od góry”, a nie „równym frontem”);
- konferencje, szkolenia;
- wydawnictwa;
- internetowy portal edukacyjny;

(b) skierowane do uczniów:
- popularyzacja (wystawy i zajęcia o nie oparte, odczyty, wykłady, plakaty, konkursy);
- aktywizacja (konkursy);
- edukacja (kółka, konkursy, wydawnictwa, portal internetowy).

6. Działania i badania podjęte w ramach realizacji grantu „Strategia nauczania matematyki w Polsce”

Jak już wyżej było powiedziane, aby należycie zaprojektować system pracy z uczniem zdolnym, należy najpierw dobrze rozeznać sytuację, czyli przeprowadzić odpowiednie badania dotyczące istniejącego stanu oraz skuteczności podejmowanych działań. Takie możliwości stworzyła realizacja grantu „Strategia nauczania matematyki w Polsce”. Realizacja (w ramach grantu) zagadnień związanych z pracą z uczniem zdolnym trwała niespełna dwa lata. Był to zbyt krótki czas, by zrealizować wszystkie naturalnie pojawiające się wątki. Rozpoczęła się ona od zbierania informacji o istniejących konkursach matematycznych w Polsce, najpierw w formie opracowania papierowego, a następnie elektronicznej bazy danych. Naturalne było jednak głębsze wniknięcie w to zagadnienie. Pojawiła się koncepcja zorganizowania na ten temat konferencji, na której można by to zagadnienie szerzej omówić i zanalizować. Spotkanie to stworzyło naturalną okazję do dyskusji na temat pracy z uczniem zdolnym. Przygotowane referaty można było próbować wzbogacać i opracowywać na ich podstawie artykuły zawierające materiały interesujące z punktu widzenia pracy z uczniem zdolnym. To inspirowało dalsze badania i działania. Nie będę ich tutaj dokładnie opisywał, a jedynie wymienię dokonania i zasygnalizuję, czego dotyczyły. Podaję adresy stron internetowych, na których znajdują się materiały z niektórych wykonanych prac. Dodam tylko, że istnieje wiele projektów dalszych badań i działań, które powinny być w przyszłości podjęte, by zakrojoną przy realizacji grantu tematykę można było w całości ogarnąć.

6.1. Główne, wykonane w trakcie realizacji grantu, badania i działania dotyczące pracy z uczniem zdolnym

- Opracowanie bazy danych o konkursach matematycznych w Polsce: www.sem.edu.pl/konkursy
- Ankieta o postrzeganiu konkursów matematycznych przez nauczycieli: www.sem.edu.pl/konkursy/ankieta oraz www.sem.edu.pl/konkursy/materialy/konkursy-opracowanie.pdf
- Konferencje: „Konkursy matematyczne w Polsce”: www.mimuw.edu.pl/ sem/konferencja-kmp2008/ „Matematyka. Jak uczyć?”: www.sem.edu.pl/konferencja-2009/
- Opracowanie materiałów, które mogą być wykorzystane w pracy z uczniem zdolnym. Składa się na nie w szczególności:
  - ponad 30 artykułów zawierających materiały do pracy z uczniem zdolnym. Mają one dość zróżnicowaną postać zarówno pod względem formy, treści jak i charakteru. Część jest gotowa do bezpośredniego wykorzystania, a część jest pewnym „zaczynem” do szerszych opracowań;
  - obszerne opracowanie zawierające materiały do prowadzenia kółek matematycznych z rozpisaniem propozycji poszczególnych zajęć. Po udoskonaleniach materiał ten może być bezcenny dla rozwinięcia systematycznej pracy z uczniem zdolnym;
- Opracowanie „Koncepcja konsolidacji środowiska nauczycieli pracujących z uczniem uzdolnionym matematycznie”. O znaczeniu takiej konsolidacji wspominałem wyżej. To opracowanie zawiera obszerne rozwinięcie tego tematu. Oczywiście dalsze doświadczenia na pewno wprowadzą

do tej koncepcji i szczegółowych, zaproponowanych tam rozwiązań wiele modyfikacji.

7. Posumowanie i uwagi o możliwościach wdrożenia systemu pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie

Wyżej została przedstawiona ogólna koncepcja zbudowania systemu pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie. Co innego jednak koncepcja, a nawet wykonane z powodzeniem cząstkowe działania, a co innego wdrożony system. Wymyślanie teoretycznych konstrukcji bez ich wdrażania nie ma zbyt wielkiego sensu. Jak wielokrotnie podkreślałem, wszystkie przedstawione tutaj uwagi i sugestie oparte są na konkretnych, podjętych i przetestowanych w praktyce, działaniach. Można wręcz powiedzieć, że wszystko, czy prawie wszystko, co wyżej zostało zawarte, jest opisem tego, co zostało już zrobione i daje podstawy do przedstawienia ogólniejszej koncepcji, która w świetle zebranych doświadczeń ma potencjał do tego, by mogła być zrealizowana. Podstawowymi składnikami tego potencjału są:

Istniejące zapotrzebowanie – to potencjalnie też źródło satysfakcji dla tych, którzy na nie odpowiedzą. Może się ono wyrażać poprzez wynagrodzenie za wykonaną pracę i osiągnięte efekty, ale i poprzez uznanie w środowisku (zresztą te dwie rzeczy dość ściśle, chociaż niekoniecznie bezpośrednio, ze sobą się łączą). I to zapotrzebowanie czynnie się objawia. Coraz więcej szkół różnych szczebli stara się wzbogacić ofertę skierowaną do uczniów uzdolnionych matematycznie, choćby po to, by przyciągnąć do nauki u siebie jak najlepszych kandydatów. Można mieć nadzieję, że szkoły będą tworzyły coraz lepsze warunki, by to zapotrzebowanie realizować.

Istniejący potecjał wykonawczy – jest sporo osób, które pracują z uczniami uzdolnionymi matematycznie. Część z nich to specjaliści najwyższej jakości w tej dziedzinie. Jest też sporo takich, którzy mają predyspozycje i chęci, chociaż czują się nieco zagubieni i niepewni. Działają w rozproszeniu i na ogół dorywczo, z chęcią, ale bez większej determinacji i nieco „po omacku”. Już sama konsolidacja i uruchomienie ich współpracy oraz wymiany doświadczeń byłoby istotnym krokiem naprzód.

Potencjał to również wszystko to, co już zostało zrobione, a jest tego sporo:

(a) Funkcjonują OM i OMG. Nie ma potrzeby przekonywania, jakie mają one znaczenie i potencjał. Ważne by tego nie popsuć, a odwrotnie, wykorzystać ten potencjał do rozwinięcia szerszej działalności.

b) Rozpoczęty proces konsolidacji środowisk i osób, które doceniają i prowadzą działalność z uczniami uzdolnionymi matematycznie. Zawiązało się Stowarzyszenie na Rzecz Edukacji Matematycznej, które taki ma właśnie cel. Zorganizowane zostały, służące temu, dwie konferencje. Można uznać, że stworzone zostały w ten sposób fundamenty, na których można dalej budować współpracę i rozwijać szerszą działalność.

(c) Rozpoczęto systematyczną działalność wydawniczą, organizowanie warsztatów, kółek, odczytów itp. Być może ważniejsze w tej chwili od samej tej działalności jest to, że w konkretnym działaniu można przekonać się, kto jest kim, co potrafi, czym się interesuje i jakie ma poglądy. To jest podstawą skutecznego działania, bo waże jest, by istniejące różnice osobowościowe ją wzbogacały, a nie dezorganizowały.

(d) Wyniki przeprowadzonych w ramach realizacji grantu „Strategia nauczania matematyki w Polsce" badań, które umożliwiły rozeznanie istniejącej sytuacji, zarówno pod względem potrzeb (np. ankieta na temat postrzegania konkursów matematycznych) tego, co się gdzie dzieje (np. elektroniczna baza danych o konkursach matematycznych), jak i praktycznej weryfikacji możliwości wykonania różnych przedsięwzięć (np. organizacji konfrencji szkoleniowych, przygotowania materiałów do pracy z uczniem zdolnym), to nieoceniony kapitał doświadczeń i źródło informacji.

(e) Istnieją dość szczegółowo przemyślane i opracowane koncepcje organizacji poszczególnych typów działań i współdziałania poszczególnych zespołów, schematy organizacyjne oraz gotowe i przetestowane niektóre narzędzia.

Jak więc widać, istnieje grunt, na którym można by system pracy z uczniem zdolnym rozwinąć i wdrożyć. Pojawia się pytanie – kto, jak i co dalej powinien robić, co może w tym pomóc i jakie są zagrożenia w skutecznej realizacji takiego przedsięwzięcia. Odpowiedź na pytanie „kto" wydaje się oczywista: te osoby i środowiska, które już to robią, chcą i potrafią. Pytanie tylko, czy zdołają się zorganizować na bazie tego, co już zostało zrobione. I jak się wydaje, główny problem to właśnie organizacja (szeroko rozumiana, włącznie ze znalezieniem źródeł finansowania). Istnieje dostatecznie dużo osób, które potrafią znakomicie wykonać praktycznie każde pojedyncze zadanie (zorganizować konkurs, napisać artykuł, przygotować materiały szkoleniowe, zorganizować warsztaty itd.). Te osoby chcą to robić i chcą ze sobą współpracować, czego dowodzi zawiązanie SEM. Stworzyło to niejako instytucjonalne warunki, w ramach których można tę współpracę organizować. To jednak nie wszystko. Problem polega na tym, kto to organizacyjnie poukłada, tak by system

„zaskoczył” i sprawnie funkcjonował. Rzecz sprowadza się w gruncie rzeczy do tego, czy znajdzie się kilka osób z odpowiednimi predyspozycjami organizacyjnymi, doświadczeniem, wyobraźnią i autorytetem, które „wezmą to w swoje ręce”. Należy pamiętać, że jest to pogranicze pracy społecznej i wynagradzanej. Nie można więc zarządzać takim systemem w sposób hierarchiczny, na zasadzie wydawania poleceń i egzekwowania ich wykonania. Potrzebne są do tego osoby o specjalnych predyspozycjach, które również poświęcą temu mnóstwo czasu i energii. Dotychczasowe dokonania, mimo że w realizacji różnych przedsięwzięć brały udział dziesiątki czy nawet setki osób, były inspirowane i „napędzane” przez jednostki, których zapał i energia są ograniczone i bez szerszego wsparcia na pewno się wyczerpią.

Wydaje się, że rośnie świadomość wartości pracy z uczniem zdolnym, zarówno u władz oświatowych, jak i w środowisku matematycznym. Dobrze by zaowocowało to rzeczowym wsparciem kilkuletniego programu budowania systemu pracy z takim uczniem.

DYSKUSJA

Profesor Tomasz Borecki – Otwierając dzisiejszą dyskusję dotyczącą problemów nauczania matematyki, chciałbym raz jeszcze podkreślić wielką rangę tego przedmiotu w edukacji. Wszystkich nas cieszy fakt, że mamy tak wiele zdolnej matematycznie młodzieży. Najlepszym tego potwierdzeniem są czołowe miejsca Polaków w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej. Chciałbym się też z Państwem podzielić swoją refleksją dotyczącą finansowania olimpiad. Moim zdaniem, finansowanie olimpiad, z punktu widzenia interesu publicznego, jest ze wszech miar uzasadnione. W kształceniu młodzieży wybitnie uzdolnionej olimpiady odgrywają bardzo ważną rolę.

Doktor Andrzej Lenarcik (Politechnika Świętokrzyska) – Zabieram głos zachęcony tym długim milczeniem, bo jestem nieśmiały z natury. Proszę Państwa, chciałbym podzielić się tym, co staramy się robić w województwie świętokrzyskim odnośnie pracy z młodzieżą uzdolnioną matematycznie. Myślę, że większość z Państwa tutaj obecnych działa podobnie w swoich środowiskach. Pragnę się wypowiedzieć, bo może dla części z Państwa w tym, co powiem, wystąpią jakieś nowe elementy. Powiem o działaniach powiązanych z Politechniką Świętokrzyską. Ponieważ będę wymieniał nazwiska osób i różne inicjatywy, dlatego z góry przepraszam, jeżeli kogoś lub coś pominę.

Zachęceni przez Panią Danutę Pyrek z Samorządowego Ośrodka Doradztwa Metodycznego i Doskonalenia Nauczycieli w Kielcach, zaczęliśmy prowadzić kółka matematyczne dla młodzieży. W latach 1997-2000 zajęcia odbywały się w IV Liceum Ogólnokształcącym w Kielcach. Później, wzorując się na środowisku krakowskim, zajęcia przenieśliśmy na Uczelnię i wprowadzaliśmy grupy o różnych poziomach zaawansowania (współpraca: Maciej i Barbara Sękalscy, Janusz Gwóździewicz i Marcin Braun). Obecnie mamy trzy grupy: licealną, gimnazjalną i dla młodzieży ze starszych klas szkoły podstawowej. To jest nasza ważna obserwacja:

jeżeli chcemy pomóc młodzieży w uzyskiwaniu sukcesów w Olimpiadzie Matematycznej w liceum, to należy zacząć z nimi pracować w gimnazjum. Inaczej jest zbyt mało czasu.

W roku 2004 umocowaliśmy naszą działalność w ramach Naukowego Koła Matematycznego Funkcjonał. Na hasło „koło matematyczne” przyszli studenci. Najdłużej współpracujemy z Panem Pawłem Łabędzkim. W tym samym roku rozpoczęliśmy spotkania z nauczycielami pod nazwą Seminarium Jakości Kształcenia Matematycznego (współpraca: D. Pyrek, B. Sękalska, M. Braun). Dzięki Seminarium poznaliśmy wielu nauczycieli, z którymi wymieniliśmy doświadczenie. Oprócz pracy z młodzieżą uzdolnioną, ważnym tematem była matura z matematyki. Także od roku 2004 organizujemy Świętokrzyskie Warsztaty Matematyczne w Świętej Katarzynie. Inspirowaliśmy się tutaj działaniami prof. Guzickiego i Waldemara Rożka. Warsztaty te przypominają zieloną szkołę. Młodzież bardzo się koncentruje, wyzwalają się w niej nowe możliwości. Podczas organizacji warsztatów pomagało nam wielu nauczycieli (Katarzyna Stolarczyk, Maria Stańczykowska, Siostra Inez Katarzyna Kasperczyk, Elżbieta Malecka, Małgorzata Mularska, Jadwiga Suliga,...). Pani Małgorzata (Ostrowiec Św.) oraz pani Jadwiga (Włoszczowa) przeniosły warsztaty do swoich szkół. Opowiadały mi o dużej efektywności tej formy zajęć: intensywna praca przeplatana jest spacerami po górach. Panie organizują również u siebie powiatowe konkursy matematyczne; pomagamy w przygotowywaniu zadań. Podobnie działa Pan Wojciech Majcher w Ożarowie.

W organizacji Warsztatów pomaga mi syn Tomasz Lenarcik (student UJ). On wprowadził u nas formę meczu matematycznego zaczerpniętą ze zgrupowań w Zwardoniu. Młodzież bardzo dobrze przyjęła mecz. Spontanicznie przeniosła tę ideę do swoich szkół. Mecze takie odbywają się w Kielcach w II Liceum Ogólnokształcącym oraz w Liceum Św. Jadwigi Królowej. Większość pracy organizacyjnej biorą na siebie olimpijczycy (Piotr Szcześniak, Filip Borowiec,...).

Chciałbym wypowiedzieć myśl, że te działania inspirowane Olimpiadą Matematyczną jakby torują drogę „nowej szkole”. Na przykład, praca z młodzieżą na wyjazdach jest tak efektywna, że być może okazałoby się, że taka szkoła jest po prostu tańsza. Olimpiada pełni rolę w systemie edukacji analogiczną do Formuły I w przemyśle samochodowym. Tutaj wypracowujemy nowe rozwiązania, z których najbardziej udane rozpowszechniają się.

Wspomnę jeszcze, że Politechnika Świętokrzyska pomaga młodzieży w przygotowywaniu się do matury (głównym inicjatorem jest Rektor prof. Stanisław Adamczak). Prowadzone przez dwa lata kursy są kontynuowane w ramach projektów UE (współpraca: Danuta Pyrek).

Pozwólcie Państwo, że na koniec podzielę się osobistą refleksją. Uważam, że praca z młodzieżą jest formą realizowania patriotyzmu. Nasi dziadowie oddawali życie za Ojczyznę, a dla nas jest to wielki dar, że działamy w warunkach pokoju, że nie musimy strzelać do siebie, tylko uczymy się w Europie wzajemnie szanować i rozumieć. Przyszłość Polski i jej pozycja zależy od nas; na ile obronimy wartości edukacyjne, moralne i rodzinne, które są fundamentem. Dziękuję serdecznie.

Profesor Edmund Puczyłowski – Miałem okazję powiedzieć kilka słów o moim nauczycielu. Takich ludzi jak mój nauczyciel, którzy mają pasję, jest wielu. Oni może niekoniecznie wszystko zawsze potrafią, czy niekoniecznie wiedzą, że potrafią i się trochę czasami zadań olimpijskich boją. Czasami nauczyciel je chowa, bo może uczeń przyjść i o coś zapytać, a on może nie będzie wiedział. W naszym badaniu ankietowym, staraliśmy się wydobyć informacje dotyczące takich obaw. Oczywiście, nie pytaliśmy bezpośrednio, bo do tego nauczyciel mógłby nie chcieć się przyznać. To na pewno jest problem, który utrudnia odkrywanie talentów matematycznych. Tych nauczycieli należy starać się odblokować. Być może również należy inaczej ich przygotowywać jeszcze na uczelniach. Swoją drogą, obniża się zainteresowanie wyborem zawodu nauczyciela, przynajmniej na Uniwersytecie Warszawskim. Jakiś czas temu, średnio chyba około 60 studentów zgłaszało się, by odbyć praktyki i uzyskać uprawnienia dydaktyczne. W ostatnich latach ta liczba spadła do około 10, a słyszałem, że w tym roku zgłosiło się chyba tylko trzech studentów. Czyli zainteresowanie dobrych studentów – bo sądzę, że studenci Wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego są dobrzy – pracą w szkole spada. Zresztą zjawisko braku chętnych do studiowania matematyki i pracy w szkole nie dotyczy tylko Polski. Być może, będzie tutaj dokładniej mówione o tym, co się na świecie dzieje. Powiem o jednym przypadku. Kiedyś, zupełnie mimochodem, spytałem mojego kolegę z Uniwersytetu w Brukseli, który właśnie skończył wykład, ilu ma na tym wykładzie studentów. Odpowiedział, że 5. Stwierdziłem, że to chyba jakieś wyspecjalizowane zajęcia. On, że nie, że to jest pierwszy rok i że mają właśnie tylu studentów, a w całej flamandzkiej części Belgii na matematyce studiuje na pierwszym roku 120 osób. Dodał, że to jeszcze nie jest dramat. Dramatem jest to, że jedynie około 20 spośród tych, którzy kończą studia, podejmuje pracę w szkole. I w tej chwili efekt jest taki, że zatrudnia się do uczenia matematyki kogokolwiek się da. Podobnie jest w Holandii. Kiedyś słyszałem, że liczba studentów pierwszego roku matematyki spadła tam do 100, a gdy wynosiła 1000, to już bito na alarm. Być może teraz to się nieco poprawiło. Podejrzewam, że studenci odkrywają, że nie każde studia dają konkretny zawód. Żeby pracować w szpitalu czy sądzie, trzeba skończyć medycynę czy prawo, ale w jakiejś firmie, w banku, równie dobrze można uzyskać pracę po pedagogice, która jest uważana za kierunek niezbyt trudny, jak i po fizyce czy matematyce, studiowanie których wymaga znacznie więcej wysiłku.

Doktor Kazimierz Cegiełka (Szkoła Główna Służby Pożarniczej) – Chciałem się podzielić kilkoma uwagami. Po pierwsze – jeśli chodzi o pracę z uczniem zdolnym, to gdy uczyłem w Liceum XIX im. Staszica, dawniej Gottwalda, nigdy nie zachęcałem uczniów do brania udziału w Olimpiadzie Matematycznej, przy czym uczyłem w klasach, które się chyba nadal nazywają eksperymentalne. Jeśli chodzi o drugą sprawę, którą chciałem podnieść, to popularyzacja matematyki. W tej chwili odbywa się coś, co nazywa się programem „Matma”. Przez przypadek obejrzałem dwie audycje w telewizji i mnie się włos na głowie zjeżył. To, co tam się wyprawia w ramach popularyzacji, w ramach zachęty do uczenia się matematyki, do popularyzacji. Trafiłem na wykład dotyczący dowodu twierdzenia, że suma miar kątów w trójkącie jest równa 180° i na rozważania dotyczące rozumowania, wnioskowania logicznego. W obu tych pięciominutowych wystąpieniach, było tak dużo błędów merytorycznych, że jestem przerażony. Przy czym osoby, które tam występują, nie są podpisane z imienia i nazwiska. Nie bardzo wiadomo, kto to mówi, czy to jest matematyk, czy to jest osoba podstawiona przez redakcję. Nie zauważyłem żadnego podpisu, kto bierze za to odpowiedzialność. Wprawdzie jest informacja, kto to promuje, ale to tak ogólnie jest tylko Centralna Komisja Egzaminacyjna. I jeszcze coś, i jeszcze coś.

Kolejna sprawa, którą chciałem poruszyć, to że w pracy z młodzieżą większy nacisk powinno się kłaść na pracę z młodzieżą niezdolną. Powinno się organizować jakieś warsztaty dla nauczycieli. W swej długoletniej praktyce prowadziłem przez kilka lat coś, co się nazywało Seminarium Edukacji Matematycznej (SEM), firmowało je Polskie Towarzystwo Matematyczne i Fundacja Rozwoju Matematyki Polskiej. Seminarium spełniło dużą rolę, jeśli chodzi o edukację nauczycieli. Wydaje mi się, że jakaś forma współpracy z osobami, które mają coś ciekawego do przekazania, jest niezwykle cenna. Powinniśmy również – nie gubiąc i nie tracąc młodzieży zdolnej – dużo czasu i pracy poświęcać nauczycielom tym przeciętnym, którzy wymagają jakiejś pomocy, którym trzeba coś podpowiedzieć, powiedzieć i czasami nawet nauczyć pewnych faktów. Dziękuję za uwagę.

Profesor Zbigniew Marciniak – Chciałem o tych filmikach słówko powiedzieć, bo je wszystkie obejrzałem i nie znalazłem żadnego błędu merytorycznego. Moim zdaniem, nie można się czepiać, że coś nie jest ortodoksyjnie sformalizowane, inna była rola tych filmów. Proszę poczytać komentarze pod tymi filmami, pochodzące od uczniów: „no, nareszcie zrozumiałem!”. Bardzo często taki komentarz pojawia pod tymi filmikami, czyli są one zrozumiałe. Matematykę należy wytłumaczyć najpierw zrozumiale, a dopiero potem superściśle. Oczywiście, zawodowy matematyk, piszący pracę matematyczną, zapewne inaczej by te treści zredagował, ale nie w tym rzecz. Pięć minut, to jest inna formuła, a występują aktorzy. Natomiast zawartość merytoryczna filmów była zweryfikowana przez pracowników Wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego – tam nie ma błędów merytorycznych. Mówię to z całą odpowiedzialnością. Na marginesie: jeden komentarz mnie rozbawił: „nie do końca rozumiem – ale fajna laska tłumaczy”.

Doktor Kazimierz Cegiełka – Możemy mieć inne zdanie z Panem Profesorem i na pewno będziemy mieć inne zdanie. Na wykładzie padło sformułowanie – kąty naprzemianległe są identyczne. Bardzo przepraszam, ale jeżeli uczniów chcemy uczyć, że kąt, to jest część półpłaszczyzny itd., to zwrot taki, że kąty są identyczne, jest dla mnie nie do przyjęcia. Oczywiście, to jest forma formalizacji, ale cóż to szkodzi powiedzieć, że kąty mają równe miary. Nie ma żadnej przesłanki, żeby to samo nie przekazać w sposób poprawny. Dziękuję.

Doktor hab. Edward Tutaj (Uniwersytet Jagielloński) – Otóż, uczę już matematyki wiele, wiele lat. Nie będę tu wyliczał ile i nieraz zastanawiałem się, co jest w nauczaniu matematyki najważniejsze. By to powiedzieć, odwołam się do pewnej sytuacji sprzed wielu, wielu lat. Oglądałem program telewizyjny. Telewizja była czarno-biała. Ten sam wiersz, powiedzmy, że którąś z ballad Mickiewicza mówili: Zbigniew Zapasiewicz, student Szkoły Teatralnej i gimnazjalista czy licealista. Gdy mówił Zapasiewicz, to zrobiłem sobie herbatę, „fajnie” mówił, bardzo ładnie. Gdy mówił student, to myślałem sobie – świetny z niego aktor wyrośnie. Gdy mówił licealista, to mnie chwytało za gardło! Chociaż seplenił, chociaż połykał końcówki! Ale był w jego recytacji fantastyczny przekaz emocjonalny. I w nauczaniu to jest najważniejsze, aby przekazać emocje!! Zgoda, „jakieś tam kąty identyczne czy nie identyczne" itd., to jest może i ważne, ale emocja, która płynie z przekazu jest najistotniejszą rzeczą! I ci nauczyciele, którzy mają sukcesy, p. Jacek Dymel na przykład, tak właśnie uczą. Gdy On mówi, to mnie też „rusza". Gdy mówi profesor Marciniak, to o czymkolwiek by mówił, chce się słuchać. Gdy mówi o matematyce w szczególności, to moje ucho samo się „ nastawia"! Bo przekaz emocjonalny, to jest w nauczaniu rzecz najistotniejsza i tego też trzeba uczyć! Nauczycieli również i przede wszystkim! A my ich uczymy różnych algorytmów, i innych „takich rzeczy" i oni wychodzą z uczelni i wchodzą do zawodu bez emocjonalnego stosunku do matematyki i jej nauczania. Bez tego idą nauczać do szkoły i to jest podstawowa wada!

Profesor Tomasz Borecki – W zawodzie nauczyciela predyspozycje do ciekawego przekazywania wiedzy, zainteresowania słuchaczy tym, co się mówi, jest niezwykle istotne. Tu obecni wiedzą bardzo dobrze, że często wybitny intelekt nie idzie w parze z umiejętnością przekazywania tejże wiedzy. Bardzo często młodzi asystenci, posiadający znacznie mniej wiedzy na dany temat, potrafią zainteresować słuchaczy i przekazać wiedzę w atrakcyjny sposób.

Profesor Edmund Puczyłowski – *A propos* tego, moje doświadczenie. Jak byłem młodym człowiekiem, to pewnego razu prowadziłem dużo zajęć i otrzymywałem za to dodatkowe wynagrodzenie. Dość dobrze wtedy płacili, jakieś 2 zł za minutę wychodziło, i to było 2 zł mniej więcej takie, jak teraz. Zauważyłem, że jak się spóźnię 5 minut, to zarobię 10 zł, jak skończę 5 minut wcześniej, to też zarobię. Również za to, gdy będę stał i patrzył w okno i 3 minuty miną, to 6 zł. Zauważyłem jednak też, że jak patrzyłem na zegarek, to zarabiałem te złotówki, ale strasznie się męczyłem i końca zajęć nie było widać. I kiedyś się zdarzyło, że studenci mnie zdenerwowali, czegoś tam nie wiedzieli i zacząłem z nimi dyskutować. Spojrzałem na zegarek i okazało się, że jest już przerwa i czas minął nie wiedzieć kiedy. Od tej pory zawsze, wykładając, staram się utrzymywać kontakt ze studentami i znaleźć sens w tym co robię, a nie myśleć o tych ewentualnych złotówkach.

Profesor Zbigniew Marciniak – Tylko jedno zdanie – cytat z Einsteina: „Każdą rzecz trzeba wytłumaczyć tak prosto, jak się da, ale nie prościej".

Doktor Krzysztof Ciesielski (Uniwersytet Jagielloński) – Jeżeli można, w sprawie tych filmów z Programu TV4 „Matma – zobacz, jakie to proste”. Otóż, widziałem kilka tych filmików i one mi się niespecjalnie podobały, a w tej chwili, po tym co Zbyszek powiedział, wiem, dlaczego one mi się nie podobały – dlatego, że to mówili aktorzy. I to też wyraźnie widać w nawiązaniu do tego, co przed chwilą powiedział Edek. Gdy się tłumaczy matematykę, to czasami trzeba się nad czymś zatrzymać, coś odpowiednio głośno powiedzieć, a może uderzyć nawet pięścią w stół. W paru wypadkach, gdy oglądałem taki film, wiedziałem, o co chodzi, ale uważam, że wiedziałem dlatego, że te rzeczy, które tam zostały przedstawione, są mi znane. Sądzę, że gdybym tego wcześniej nie znał, to bym nie zrozumiał, o co chodzi. A jestem matematykiem, co prawda nie jestem profesorem, ale się trochę na tej matematyce znam. Jeśli to dla mnie jest trudne, to jak dla odbiorcy, który nie jest matematykiem? Gdy ktokolwiek z nas obecnych tu na sali tłumaczy matematykę, to wie, które miejsce jest trudniejsze i w tym miejscu trzeba się zatrzymać i coś powtórzyć, tu coś dokładniej pokazać palcem, tu zmienić intonację – a aktor tego nie wie, on się tego nauczył na pamięć, i może nawet nie rozumie co mówi – zna słowa, ale nie rozumie sensu. Aby dobrze wytłumaczyć matematykę, trzeba ją samemu nad wyraz dogłębnie rozumieć. Nie wiem, kto decydował o tym, że będą to przedstawiać aktorzy, ale może trzeba było, jeżeli się miało na to wpływ, powiedzieć – niech to zrobią wasi doktoranci, wasi asystenci, wasi pracownicy, wasi nauczyciele, bo matematyk, nawet jak się zająknie czy ma złą dykcję, to powie w odpowiedni sposób. Zresztą ci, którzy to przedstawiają, też popełniają błędy językowe – na przykład, nie wolno zaczynać zdania od „więc” czy „zatem”, a ja w jednym odcinku nawet policzyłem, prelegent sześć razy zdanie od zatem zaczął. W ciągu paru minut. I błędów językowych było więcej. Matematyk w takim programie pewnie też popełniłby błędy językowe, ale przynajmniej powiedziałby to co trzeba i z odpowiednią emocją, z intonacją. Tak, jak powiedział Edek przed chwilą, przekazałby emocję. Już nie mówię, że to miałby Edek robić, bo Edek to jest ideał, i mało kto tak potrafi. On rąbnie w odpowiednim momencie pięścią w tablicę, pokaże co trzeba i wszyscy będziemy wiedzieli o co chodzi – a to rozumowanie pokazane w telewizji jest chwilami przedstawiane za szybko i ogólnie za monotonnie. Po prostu, mnie się wydaje, że błędem było, że się nie dało tego do pokazania tym, którzy wiedzą, co mówią. I w ogóle, czy przez parę minut można szerokiej publiczności pokazać takie rozumowanie matematyczne i liczyć na ogólne zrozumienie materiału? Oczywiście, to moja prywatna opinia na podstawie kilku odcinków, które widziałem i mnie się one niespecjalnie podobały.

Profesor Tomasz Szapiro (Szkoła Główna Handlowa) – Sprawa pierwsza. Nawiązując do promocji matematyki w telewizji, trzeba odnotować, że nie wywód matematyczny odgrywa tu rolę pierwszoplanową. Pamiętam taki film, w którym znana tyczkarka stwierdza, że gdyby nie matematyka, nigdy nie pokonałaby poprzeczki. Ilustruje to nałożona na obraz grafika – trajektoria środka ciężkości jej ciała. Pojawia się więc nie tylko matematyka, ale i fizyka oraz – wątpliwości. Gdy chodzi o fizykę, to chociaż to prawda, ale kompletnie nie jest jasne, że można manipulować swoim środkiem ciężkości. Raczej wierzymy tu atrakcyjnej mistrzyni na słowo. Oczywiście w filmie jest też matematyka – parabola, maksimum tej paraboli, tylko trzeba już COŚ o tym wiedzieć, żeby to rozumieć. Zatem przemycaną tezę – jeśli znasz matematykę, to będziesz człowiekiem sukcesu – uwiarygodnia mistrzyni, a nie logiczny wywód.

Zgadzając się więc z ocenami o niedoskonałości merytorycznej tych prezentacji, pamiętam jednak, że nie jest to wina odtwórcy. Ale przede wszystkim – cieszę się z sojuszników, że znane osoby poparły swoją wiarygodnością promocję matematyki i to zapewne z dobrym skutkiem. Bo w moim odczuciu, to dzięki temu właśnie widz po obejrzeniu tych filmów jest do matematyki bardziej przekonany niż przedtem.

Promocja matematyki, cieszy mnie również dlatego, że – jak wspomniano - zaczyna być ona słowem zapoznanym, którego znaczenia się nie zna. Dlatego, gdy słowo to pada wypowiedziane w atrakcyjny sposób, choć nie zawsze perfekcyjnie poprawny, warto przypomnieć myśl Laplace'a o tym, że nieprawidłowość, która budzi, jest lepsza od prawidłowości, która usypia. Jeśli to filmy budzą coś w ludziach, jeśli pytają oni swoich nauczycieli, sąsiadki, kogo mogą, o co chodzi, to taki pomysł z promocją matematyki jest godzien respektu i cieszy.

Sprawa druga. Uczę matematyki blisko 40 lat i zauważyłem, że mam dwie grupy podopiecznych. Pierwsza, to ci, którzy kochają matematykę, których ona ciekawi. Grupę drugą tworzą osoby, które uczą się matematyki dlatego, że to się bardzo opłaca. Ta dwoistość stwarza bardzo poważny problem. Trzeba znaleźć sposób pozwalający jednocześnie mówić do tych, którzy przyszli, już znając po trosze matematykę, do których matematyka trafia, którzy ją z zapałem wcześniej studiowali, i zarazem – nie utracić tych, którzy nie są tak dobrze przygotowani, a umotywowani są inaczej. Trzeba dzielić się sposobami pozwalającymi uniknąć przerabiania podopiecznych w ludzkie maszyny przetwarzające rejestrowane dane zgodnie z wykutymi algorytmami, a pozwalającymi matematykę rozwijać w praktyce twórczo. Potrzebne są sesje na konferencjach służące promocji sposobów nauczania i pozwalające konsumować ten dar, że matematycy są różni, że metody nauczania matematyki nieustannie podnoszą swój poziom, czerpiąc bardzo dużo inspiracji i z fizyki i z ekonomii, żeby nie wymieniać tych wychodzących z nauk biologicznych.

Reasumując, sądzę, że promocja – i matematyki i sposobów jej nauczania – ze wszystkimi jej rzeczywistymi niedociągnięciami, będącymi przedmiotem naszej troski, jest bardzo potrzebna i ma bardzo ważką rolę do odegrania. Dziękuję.

Głos z sali – Proszę Państwa, oprócz dyskusji na temat filmików, mówimy również, jakie mamy wspomnienia dotyczące uczenia. Podzielę się z Państwem jednym moim osobistym doświadczeniem. To będzie absolutna herezja w stosunku do tego, co tutaj mówiliśmy, bo nie będzie mowy o pracy z uczniem, a dokładnie mówiąc studentem zdolnym, tylko wręcz przeciwnie. Otóż, prowadzę zajęcia na Uniwersytecie ze studentami różnych poziomów – od bardzo elementarnych zajęć do bardziej zaawansowanych, ale mam również co roku wykład z matematyki na Wydziale Ekonomii, i tam jest oczywiście egzamin. Potem jest egzamin poprawkowy i po tym egzaminie poprawkowym pozostaje około 50 osób – co roku – które sobie z tym przedmiotem nie poradziły i one mają do wyboru albo powtarzać ten przedmiot, albo uczestniczyć w takiej sesji letniej, jakby się to w Ameryce nazywało *summer session*, a u nas to się nazywa kurs przygotowawczy. Jeszcze raz to samo, 30 godzin ćwiczeń, tylko skondensowanych w dwa tygodnie. Taki kurs powtórzeniowy kończy się potem egzaminem – takim samym, jak były te dwa, których oni nie zdali. I tam się zapisują ci studenci najgorsi z najgorszych. Proszę Państwa, to są moje ulubione zajęcia. Dla mnie największą przyjemnością jest widzieć, jak ci ludzie, którzy dwa razy oblali ten egzamin, potem wychodzą po tym kursie z czwórkami, piątkami. Nie twierdzę, że wszyscy oczywiście, ale jakaś część z nich. Zdarzyło mi się kiedyś, że studentka, która musiała przerwać studia, dlatego że oblała inne egzaminy, przyszła do mnie tylko po to, żeby dostać wpis na pamiątkę, że dostała czwórkę z przedmiotu matematycznego po raz pierwszy w życiu. Na koniec powiem tyle, to może być infantylne porównanie, ale ta moja działalność czasem przypomina mi w moim własnym oku, może zbyt łaskawym, taki film, właściwie serię filmów amerykańskich, który się nazywa „Parszywa dwunastka" – jak taki gość, jakiś tam sierżant, zbiera tych kompletnych nieudaczników wojskowych, robi taki obóz i potem oni stają się sfantastycznymi żołnierzami. Coś takiego, z zachowaniem proporcji. Oni płacą za ten kurs wakacyjny, ale za normalne studia płacą też.

Doktor hab. Michał Szurek (Uniwersytet Warszawski) – Od zawsze miałem wiele zastrzeżeń do kształcenia nauczycieli. Mój pierwszy kontakt z tym problemem miał miejsce za czasów ministra Kuberskiego (środkowe lata siedemdziesiąte), gdzie nauczyciele zostali niejako zmuszeni do studiowania na uniwersytetach. O poziomie tych studiów wolę nie mówić. Pamiętam tylko swoje frustracje, gdy widziałem różnicę między poziomem na studiach dziennych i zaocznych. A dyplomy były równoważne. Ze wstydem muszę powiedzieć, że mój podpis figuruje na dyplomie pana, który na pytanie, ile to jest dwa do minus pierwszej, odpowiedział: jak to, przecież nie można dwójki minus jeden razy pomnożyć przez siebie. Wtedy byłem młody i łatwo ulegałem presji osób – a taką presję wywarła na mnie pewna wybitna osoba. Po kilkunastu latach przerwy pojechałem na Seminarium Edukacji Matematycznej, o którym wspominał Pan dr Cegiełka. Tam zobaczyłem innych ludzi, innych nauczycieli – takich, którym nie jest wszystko jedno. To byli (są) wzorowi nauczyciele, tacy powinni być wszyscy. Seminaria były zjazdami nauczycieli z całej Polski, bywało na nich do siedemdziesięciu osób. O odpowiedni poziom naukowy dbało stosowne grono pracowników wyższych uczelni i dydaktyków, chciałbym wyróżnić tu profesora Kazimierza Skurzyńskiego ze Szczecina. Seminarium zanikło. Ostatni zjazd odbył się jesienią 2007 roku.

W 2007 roku w Grudziądzu, na zjeździe Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki, ówczesny wiceminister Stanisław Sławiński obiecał, że niedługo będą pieniądze unijne na kształcenie nauczycieli. Te pieniądze rzeczywiście potem przyszły i muszę powiedzieć, że są po prostu marnowane. Nie wiem ile, ale bardzo duża część owych pieniędzy idzie na to, by nauczyciele robili drugą specjalność. Idea szczytna, pod którą należy się podpisać. W praktyce jednak na taki kurs (mówię o matematyce) idą starsi nauczyciele o tak niskim poziomie wiedzy, że nie sposób ich porządnie nauczyć czegokolwiek. Ci nauczyciele jednak kończą kursy. Mają dokument i często zabierają pracę ludziom świetnie przygotowanym do pracy w szkole. Dlatego mam wielki żal do decydentów o zmarnowanie tych dużych sum pieniędzy. Mam nadzieję, że działalność nowego Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej pokaże model porządnego kształcenia nauczycieli.

KONKURSY I OLIMPIADY MATEMATYCZNE W POLSCE

Jacek Dymel

V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
e-mail: jdymel@interia.pl

Niniejszy artykuł zawiera opis oraz analizę ankiety o konkursach, która została przeprowadzona przez Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej, a także wyniki badań nad Olimpiadą Matematyczną (zawarte w mojej pracy doktorskiej „Analiza trudności zadań Olimpiady Matematycznej" napisanej pod kierunkiem dr. hab. Michała Szurka).
Wszystkie opisane poniżej badania i działania były możliwe dzięki wsparciu z grantu *Strategia nauczania matematyki w Polsce* prof. Zbigniewa Marciniaka.

1. Baza konkursów

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej na swojej stronie internetowej www.sem.edu.pl/konkursy prezentuje pierwszą tego typu bazę danych *Konkursy matematyczne w Polsce*. Autorami bazy są: Marzena Filipowicz-Chomko, Ewa Girejko, Izabela Horenda-Kulbat, Katarzyna Kowalczyk, Paweł Kwiatkowski i Anna Poskrobko (zebranie i opracowanie danych) oraz Jakub Pochrybniak (opracowanie elektroniczne).

Oto, jak o bazie piszą sami autorzy:

> „Konkursy matematyczne odgrywają bardzo ważną rolę w popularyzacji matematyki, propagowaniu wśród uczniów zainteresowania matematyką, wyłanianiu uczniów o uzdolnieniach matematycznych i zachęcaniu ich do rozwijania tych uzdolnień. Mają one różną rangę, formę i cele. Są wśród nich konkursy o zasięgu międzynarodowym czy ogólnopolskim, ale też konkursy lokalne: powiatowe, gminne, międzyszkolne. Są konkursy z długą tradycją i konkursy okazjonalne. Konkursy matematyczne odbywają

się we wszystkich regionach kraju, organizowane są we wszystkich typach szkół i kierowane do uczniów wszystkich klas. Organizatorami takich przedsięwzięć są zazwyczaj różne instytucje edukacyjne, ale wiele inicjatyw konkursowych wychodzi bezpośrednio od nauczycieli. Ogólnie można stwierdzić, że aktywność konkursowa jest różnorodna i wywiera istotny wpływ na edukację matematyczną młodzieży szkolnej. Wydaje się jednak celowe i użyteczne dokładniejsze zbadanie tego zjawiska. By jednak takie badania podjąć, należy najpierw zebrać odpowiednie informacje. W tym celu została stworzona elektroniczna kartoteka pod nazwą *Konkursy Matematyczne w Polsce – Baza Danych*. Umieszczono w niej dane, które odnoszą się do 126 konkursów i jest to, jak można sądzić, informacja statystycznie reprezentatywna. Autorzy opracowania zdają sobie sprawę z tego, że jest to dopiero pierwszy krok na drodze opisania i zbadania tego zagadnienia, jako że informacje przedstawiane w niniejszym opracowaniu powinny być dalej uzupełniane, pogłębiane i analizowane. Autorzy pragną, by kartoteka *Konkursy Matematyczne w Polsce – Baza Danych* była nie tylko archiwum konkursów, ale też źródłem informacji o ich aktualnych edycjach. Twórcy bazy liczą, że zgromadzone w tej bazie materiały będą użyteczne dla uczniów, którzy biorą lub planują brać udział w tego typu konkursach; mają także przekonanie, że zebrane materiały zawierają informacje przydatne dla organizatorów wszelkich konkursów matematycznych, dzięki temu przyczynią się do podniesienia jakości organizowanych konkursów, a w konsekwencji do poprawienia efektywności nauczania matematyki, w tym doskonalenia pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie."

Każdy z konkursów, który został ujęty w kartotece *Konkursy Matematyczne w Polsce – Baza Danych* jest opisany za pomocą danych przydzielonych do jednej z dwunastu kategorii.

1. Organizatorzy konkursów
2. Cele i zamierzenia organizatorów
3. Adresaci konkursu
4. Liczba edycji
5. Rok pierwszej edycji
6. Rok najnowszej zakończonej edycji
7. Zasięg terytorialny konkursu
8. Liczba uczestników najnowszej zakończonej edycji
9. Forma organizacyjna

10. Formuła zadań konkursowych
11. Nagrody i przywileje
12. Kontakt

Warto dodać, że pierwszą próbę opisu konkursów matematycznych w województwie małopolskim podjął Michał Niedźwiedź. Efekty jego pracy można znaleźć również na stronie SEM: www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-kmp2008/?strona=texty/materialy.php.

Znajdują się tam dwa pliki do pobrania: *Przegląd konkursów matematycznych dla uczniów w Krakowie i okolicach* oraz *Przegląd konkursów – obszerniejsze materiały.*

2. Ankieta o konkursach

Ankieta o konkursach została przeprowadzona jesienią 2009 roku wśród pedagogów, nauczycieli i pracowników naukowych, którzy mają do czynienia z uczniami biorącymi udział w konkursach matematycznych. Autorem ankiety i opracowania, na którym się opierałem, był Pan Michał Puczyłowski.

2.1. Cele badania

Podstawowym celem przeprowadzonego badania było poznanie opinii nauczycieli o konkursach matematycznych, w których biorą lub mogą brać udział ich uczniowie lub podopieczni. Wobec braku wcześniejszych tego typu badań, analizę należy uznać za pionierską. Pozwala ona wskazać kierunki dalszych badań i sformułować wstępne hipotezy.

Celami szczegółowymi ankiety było poznanie:

- znajomości konkursów wśród nauczycieli matematyki,
- subiektywnej percepcji poziomu oraz prestiżu konkursów, a także czynników je kształtujących,
- powodów uczestnictwa i powodów rekomendacji uczestnictwa w konkursach.

Badanie zostało zaprojektowane w postaci ankiety internetowej uzupełnianej samodzielnie przez respondentów. Dobór osób do ankiety polegał na rozesłaniu wiadomości e-mailowej z linkiem do strony http://sem.edu.pl/konkursy/ankieta/ do nauczycieli, których dane adresowe umieszczone były w bazie zawierającej około 350 adresów e-mailowych.

Ankieta składała się z 12 pytań dotyczących kilku obszarów związanych z konkursami matematycznymi. W większości były to pytania zamknięte, choć dopuszczono możliwość własnej wypowiedzi i komentarzy.

2.2. Wyniki ankiety

Wśród ankietowanych było 71% kobiet, 71% nauczycieli dyplomowanych, 10% nauczycieli mianowanych, 6% pracowników naukowych. Blisko 75% badanych osób osiągnęło wiek powyżej 40 lat. Nauczyciele o stażu pracy ponad 10 lat stanowili 84% ankietowanych. Oznacza to, że ankieta została wypełniona przede wszystkim przez doświadczonych nauczycieli.

Liczba uczniów, którzy uczestniczyli w konkursach pod opieką pytanych nauczycieli w większości przypadków nie przekracza 20. Największa grupa pytanych osób zajmuje się małymi grupami uczniów (z grupami do 10 uczniów pracuje 39% badanych osób).

Tabela 1. Znajomość konkursów wśród uczestników ankiety

Konkurs	Znajomość
Kangur	96%
Olimpiada Matematyczna	55%
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów	52%
Gimnazjalne konkursy kuratoryjne	45%
Konkursy lokalne	39%
Alfik	30%
Konkursy wojewódzkie (inne niż kuratoryjne)	24%
Matematyka bez granic	17%
Gry Matematyczne i Logiczne	14%
Matmix	11%
Kwadratura koła	11%

Najbardziej znanym konkursem (tabela 1) okazał się Kangur. Wynika to zapewne stąd, że jest on adresowany do wszystkie grup wiekowych uczniów i prawie każdy nauczyciel zetknął się z tym konkursem.

Bardzo dobrym wynikiem znajomości wśród nauczycieli mogą pochwalić się Olimpiada Matematyczna i Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów. Każda z tych olimpiad jest znana przez nieco ponad połowę nauczycieli. Wobec faktu, że olimpiady te są adresowane do specyficznej grupy uczniów oraz na ogół nauczyciele szkół gimnazjalnych i nauczyciele szkół ponadgimnazjalnych to grupy rozłączne, znajomość olimpiad wśród nauczycieli należy uznać za bardzo dużą.

Bardzo dobrą rozpoznawalność mają gimnazjalne konkursy kuratoryjne, co związane jest z istotną rolą tych konkursów w rekrutacji do szkół ponadgimnazjalnych.

Tabela 2. Przydatność konkursów w ocenie uczestników ankiety

Konkurs	Ocena	Liczba wskazań
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów	4,6	43
Matematyka bez Granic	4,6	14
Śląski konkurs matematyczny	4,5	13
Olimpiada Matematyczna	4,4	46
Konkursy lokalne	4,2	32
Gimnazjalne konkursy kuratoryjne	4,1	37
Gry matematyczne i logiczne	4,1	12
Konkursy wojewódzkie	4,1	20
Kangur	4,0	80
Inne konkursy	3,8	60
Alfik	3,3	25

Najwyżej ocenianą przydatność w ocenie ankietowanych (tabela 2) mają konkursy: Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG) i Matematyka bez Granic. Trzeba zaznaczyć, że OMG miała trzy razy więcej wskazań niż Matematyka bez Granic, co sytuuje ten konkurs na pozycji najbardziej przydatnego.

Podobnie wysoko można ocenić przydatność Olimpiady Matematycznej (OM) ze średnią oceną 4,4 przy 46 wskazaniach.

Ocenę przydatności 4,1 gimnazjalnych konkursów kuratoryjnych należy potraktować jako mało satysfakcjonującą, wobec ich znaczenia przy rekrutacji do szkół ponadgimnazjalnych.

Tabela 3 pokazuje, że praktycznie wszyscy nauczyciele mają uczniów biorących udział w konkursie Kangur. Wynikać to może zarówno z faktu, że w konkursie mogą wziąć udział uczniowie ze wszystkich poziomów edukacyjnych, jak i z formuły konkursu: uczniowie rozwiązują test wyboru składający się z zadań różnej trudności, od bardzo łatwych do bardzo trudnych.

Ze względu na trudność olimpiad, wynik osiągnięty przez OM i OMG należy uznać za bardzo dobry. Jednakże należy popatrzeć na niego także przez pryzmat doboru ankietowanych: to przede wszystkim nauczyciele zaintere-

Tabela 3. Udział uczniów w konkursach

Konkurs	Udział
Kangur	92%
Gimnazjalne konkursy kuratoryjne	35%
Olimpiada Matematyczna	32%
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów	27%
Konkursy wojewódzkie (inne niż kuratoryjne)	27%
Konkursy lokalne	27%
Alfik	22%
Matematyka bez granic	15%
Gry Matematyczne i Logiczne	15%
Matmix	9%
Kwadratura koła	9%

sowani konkursami i udziałem uczniów w tych konkursach. Gdyby ankieta objęła całą populację nauczycieli matematyki, to – biorąc pod uwagę liczbę uczestników OM i OMG – liczba wskazań byłaby prawdopodobnie znacznie niższa.

Tabela 4. Ocena prestiżu konkursów

Konkurs	Procent wskazań
Olimpiada Matematyczna	61%
Kangur	47%
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów	42%
Gimnazjalne konkursy kuratoryjne	33%
Konkursy lokalne	9%
Konkursy wojewódzkie (inne niż kuratoryjne)	8%

Za najbardziej prestiżowy konkurs została uznana Olimpiada Matematyczna (tabela 4). Jednym z elementów wpływających na taką ocenę jest bardzo duża trudność zadań i w konsekwencji mała dostępność dla uczniów.

Wysokim prestiżem cieszą się także Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów i Kangur.

Zwracają uwagę elementy wpływające na jakość konkursu (tabela 5). Przede wszystkim ankietowani wskazali na kwestie merytoryczne (wiedza i umiejętności wymagane od uczestników, potrzeba wykazania talentu).

Tabela 5. Elementy oceny jakości konkursów

Element	Udział
Wiedza i umiejętności wymagane od uczestników	61%
Potrzeba wykazania talentu	60%
Zgodność poziomu merytorycznego z celami konkursu	56%
Przywileje dla laureatów	48%
Dostosowanie formy konkursu do jego celów	42%

Oznaczenia użyte w tabelach 6, 7 i 8:

T – konkursy testowe,
KG – konkursy gimnazjalne kuratoryjne,
PG – konkursy ponadgimnazjalne,
P – konkursy ogólnopolskie,
L – konkursy lokalne.

Tabela 6. Powody uczestnictwa uczniów w konkursach

Powody	OM, OMG	T	KG	PG	P	L
Nagrody	12%	**48%**	6%	10%	**43%**	**41%**
Uprawnienia	**73%**	17%	**86%**	**79%**	30%	27%
Współzawodnictwo	43%	**67%**	37%	35%	47%	**58%**
Poprawa oceny	27%	42%	**51%**	24%	26%	**51%**
Poprawa umiejętności	**62%**	37%	38%	41%	38%	42%
Sprawdzenie zdolności	**73%**	**67%**	52%	46%	45%	56%
Sugestia nauczyciela	33%	35%	35%	20%	31%	39%

Obserwując dwa pierwsze wiersze tabeli 6, można sformułować hipotezę, że dla uczniów istotny jest element gratyfikacji, przede wszystkim w postaci uprawnień, rzadziej – nagród materialnych.

Udział w olimpiadach jest spowodowany przede wszystkim kwestiami merytorycznymi: poprawą umiejętności i sprawdzeniem zdolności. Istotną motywacją jest uzyskanie uprawnień, wobec których nagrody finansowe nie mają już takiego znaczenia. Związane jest to także z typem uczniów, którzy startują w olimpiadach: są to uczniowie o silnie zarysowanych uzdolnieniach, którzy szukają potwierdzenia swoich umiejętności i talentów. Do pewnego stopnia bycie finalistą olimpiady niesie takie ułatwienia – uczeń jest oceniany w szkole przez pryzmat swoich osiągnięć.

W przypadku konkursów testowych istotnymi motywami były, oprócz nagród, chęć współzawodnictwa i możliwość sprawdzenia zdolności.

W przypadku wszystkich typów konkursów zwraca uwagę istotny, choć nie dominujący, wpływ sugestii nauczyciela na uczestnictwo ucznia w konkursie.

Tabela 7. Powody rekomendacji uczniom konkursów

Powody	OM, OMG	T	KG	PG	P	L
Nagrody	6%	**27%**	4%	8%	**32%**	**27%**
Uprawnienia	**67%**	24%	**76%**	**70%**	37%	38%
Współzawodnictwo	56%	**74%**	41%	43%	45%	58%
Poprawa umiejętności	**69%**	55%	51%	43%	56%	60%
Rozbudzenie zainteresowań	**66%**	**68%**	39%	32%	50%	55%
Awans zawodowy	16%	14%	20%	12%	8%	12%
Wpływ dyrekcji	31%	25%	**40%**	25%	23%	29%

Bardzo ciekawe są powody rekomendacji uczniom konkursów (tabela 7).

Olimpiady są rekomendowane przede wszystkim z powodu uprawnień, poprawy umiejętności i możliwości rozbudzenia zainteresowań. Ten ostatni powód jest szczególnie interesujący, gdyż do tej pory panował raczej pogląd, że olimpiady są adresowane do uczniów, którzy już mają dobrze ukonstytuowane zainteresowania.

W przypadku gimnazjalnych konkursów kuratoryjnych charakterystyczny jest motyw uprawnień i nieco zaskakujący wpływ dyrekcji. Można to wytłumaczyć tym, że osiągnięcia uczniów w tego typu konkursach są pewną wizytówką szkoły, kryterium według którego oceniana jest praca szkoły. Zwraca też uwagę relatywnie niski współczynnik rekomendacji z powodu możliwości rozbudzania zainteresowań.

Jednym z najciekawszych aspektów przeprowadzonej ankiety było pytanie dotyczące odradzania uczestnictwa w konkursach. Pytanie zostało sformułowane następująco: *Co wpływa na to, że nauczyciele odradzają uczniom udział w wymienionych kategoriach konkursów?*

Dzięki takiemu sformułowaniu nauczyciel odpowiadający na takie pytanie, nie czuł dyskomfortu ujawnienia swojej, niekoniecznie popularnej i stawiającej w złym świetle, odpowiedzi. Oczywiście, poprzez zadanie pytania odnoszącego się do opinii innych, możliwy jest błąd w stosunku do faktycznych sądów ankietowanych, lecz korzyści wydają się być przeważające.

Tabela 8. Powody odradzania uczestnictwa w konkursach

Powody	OM, OMG	T	KG	PG	P	L
Niedopasowanie do wieku	**38%**	14%	26%	12%	17%	17%
Niski poziom	5%	5%	5%	5%	**21%**	**31%**
Niejasne zasady	10%	19%	12%	7%	14%	19%
Zbyt wysoki koszt	5%	**50%**	2%	7%	26%	2%
Nieatrakcyjne nagrody	10%	17%	12%	12%	14%	14%
Zbyt trudny	**57%**	**2%**	19%	17%	14%	14%
Absorbujące przygotowania	14%	14%	12%	5%	7%	14%
Dodatkowe konsultacje	**29%**	7%	5%	14%	2%	12%

W tabeli 8 zostały podane powody odradzania uczestnictwa w konkursach, ale wyniki dotyczą tylko tych ankietowanych, którzy odradzali udział w konkursach (połowa badanych).

Olimpiady są odradzane uczniom głównie z powodów merytorycznych: niedopasowania do wieku, zbyt dużej trudności i problemu z dodatkowymi konsultacjami. Te motywy wynikają zapewne z obawy nauczycieli, że uczniowie mogą sobie nie poradzić samodzielnie z przygotowaniami, a nie znajdą właściwej pomocy u nauczyciela.

Koszt udziału w konkursach testowych okazuje się istotnym motywem odradzania tych konkursów. Zaskakuje opinia nauczycieli, że zadania z tych konkursów nie są zbyt trudne.

W przypadku konkursów ogólnopolskich i lokalnych zwraca uwagę relatywnie duża liczba wskazań na ich niski poziom.

Tabela 9. Oczekiwania w stosunku do konkursów przez pryzmat brakujących konkursów

Element	Udział
Pokazujące użyteczność matematyki	48%
Pokazujące praktyczne zastosowanie matematyki	43%
Popularyzujące matematykę	41%
Sprawdzające wiedzę dostosowaną do wieku ucznia	41%
Wyłaniające uczniów do startu w OMG	27%
Wykazujące predyspozycje do podjęcia studiów politechnicznych	25%
Wyłaniające uczniów do startu w OM	24%
Wykazujące predyspozycje do podjęcia studiów matematycznych/informatycznych	21%

Tabela 9 pokazuje, że nauczycielom doskwiera brak konkursów pokazujących zastosowania matematyki i popularyzujących matematykę. Można uznać, że chodzi o brak konkursów, które zachęciłyby szerszą grupę uczniów do zainteresowania się matematyką poprzez ukazanie jej wymiaru praktycznego.

Tabela 10. Poprawa popularności konkursów

Element	Udział
Przywileje dla laureatów	68%
Dostosowanie wymagań do wieku uczestników	57%
Atrakcyjne nagrody finansowe/rzeczowe	49%
Przejrzysty regulamin konkursu	16%

W ocenie nauczycieli, dla upowszechnienia konkursów matematycznych niezbędne są gratyfikacje (czy to w postaci uprawnień, czy też nagród materialnych) oraz dostosowanie poziomu konkursów do możliwości typowego ucznia (tabela 10).

Powyżej opisane odpowiedzi nauczycieli sugerują, że według ankietowanych konkursy powinny być adresowane do szerokiej populacji uczniów i stanowić dla nich bodziec i zachętę do uczenia się matematyki, a w mniejszym stopniu powinny być adresowane do uczniów o ponadprzeciętnych uzdolnieniach. Być może istniejące konkursy i olimpiady, w ocenie ankietowanych, wystarczająco zaspokajają potrzeby związane z pracą z uczniem zdolnym.

2.3. Uwagi nauczycieli

Bardzo ważne jest wsłuchanie się w swobodne wypowiedzi ankietowanych, które ujawniają problemy i bolączki nauczycieli przygotowujących uczniów do startu w konkursach.

- Użyteczne byłoby uzyskiwanie uprawnień w konkursach ogólnopolskich na poziomie tytułu finalisty równoznacznego z tytułem laureata w konkursie wojewódzkim.

- Brakuje konkursów popularyzujących matematykę. W wielu konkursach zadania nawet na niższych szczeblach są za trudne. Uważam, że przynajmniej niektóre konkursy nie powinny konkurować poziomem zadań z Olimpiadą.

- Za dużo jest konkursów płatnych wymagających tylko wyboru właściwej odpowiedzi. Uważam, że takie konkursy nie uczą myślenia, tylko uczą szybkiego i płytkiego myślenia.

- Prawne umocowanie w budżetach szkół wszelkich kosztów (np. opłata za test, dojazdy, delegacje, noclegi, zakup literatury) związanych z uczestniczeniem uczniów w różnych konkursach.
- Obok konkursów przewidzianych dla uczniów uzdolnionych matematycznie, brak jest konkursów popularyzujących styl myślenia matematycznego i praktyczne zastosowania wiedzy matematycznej, w których sukces matematyczny może osiągnąć większa liczba uczniów najmłodszych.
- Organizatorzy konkursów pracują społecznie. Często konkursy odbywają się dzięki ich dużemu zaangażowaniu i wkładzie środków własnych. Bardzo trudno o środki finansowe pozwalające zorganizować konkurs i ufundować nagrody dla laureatów.
- Uważam, że mało jest literatury pomocnej gimnazjalistom rozpoznać i rozwijać swoje talenty matematyczne, a ta która jest nie spełnia moich oczekiwań. Zadania w zbiorach zadań często się powtarzają i są typowe lub zbyt wykraczające poza program gimnazjum. Dużo czasu zajmuje mi poszukiwanie odpowiednich zadań lub ich układanie.
- Zachęcenie do udziału zadaniami prostszymi – dla ucznia nie jest motywujące nierozwiązanie żadnego zadania.
- Brakuje konkursów i kół matematycznych lokalnych, zwłaszcza w kategorii gimnazjów i liceów, co powoduje, że uczniowie mają problemy ze współzawodnictwem na poziomie centralnym. Być może warto szkolić nauczycieli, którzy przeprowadzą takie konkursy oraz poszerzyć eliminacje lokalne konkursów centralnych (np. OM) o jakąś formę dokształcania uczniów.
- Uważam, że powinno się skończyć z płaceniem po równo, a zacząć uwzględniać osiągnięcia w pracy z uczniem zdolnym.
- W dzisiejszym świecie matematyka postrzegana jest jako BARDZO TRUDNY przedmiot, który wymaga dużego nakładu pracy. Uczniowie szukają konkursów, które dają im możliwość wpisania osiągnięć na świadectwo, co w konsekwencji pozwala na staranie się o stypendia na szczeblu miejskim, powiatowym, wojewódzkim. Muszą się pojawić konkursy matematyczne, które będą dostosowane do dzisiejszego programu nauczania, gdzie uczniowie na starcie nie wyrzucą zadań do kosza, bo rozwiązanie problemów kosztuje więcej pracy niż zysk, który można osiągnąć. Nagrody rzeczowe już nie wystarczają. Mamy pokolenie, które liczy korzyści...

3. Praca doktorska: *Analiza trudności zadań Olimpiady Matematycznej*

promotor: dr hab. Michał Szurek

Olimpiada Matematyczna istnieje 61 lat; została powołana z dniem 1 listopada 1949 roku zarządzeniem Ministra Oświaty z dnia 31 października 1949 roku (Nr II-7340/49) o zorganizowaniu zawodów matematycznych w szkołach.

W swojej sześćdziesięcioletniej historii Olimpiada Matematyczna nie doczekała się gruntownej analizy merytorycznej i dydaktycznej. Jednym z powodów zajęcia się tym tematem był brak kompleksowych badań nad Olimpiadą Matematyczną. Celem moich działań było także stworzenie analizy przydatnej w pracy nauczyciela olimpijskiego oraz organizatorów OM, a także zaproponowanie narzędzi badawczych dostosowanych do problemów Olimpiady Matematycznej.

Badania swoje oparłem na analizie rozwiązań dziesięciu zadań drugich i trzecich etapów 57. i 58. OM, wybranych według klucza:

1. zadania o nierównościach (3 zadania),
2. zadania z geometrii płaskiej (5 zadań),
3. zadania z geometrii przestrzennej (2 zadania).

Tabela 11. Liczba analizowanych prac

Zadanie	Liczba prac	Liczba pustych prac
3.2.57	560	135
6.2.58	560	259
6.3.58	123	69
2.2.57	560	330
5.2.57	560	209
3.3.57	125	84
5.2.58	562	182
1.3.58	123	34
5.3.57	125	67
5.3.58	123	93
Razem	3421	1462

Wybór zadań do analizy nie był przypadkowy.

Wśród uczniów panuje opinia, że zadania geometryczne na Olimpiadzie Matematycznej są trudne, gdyż nie poddają się łatwo sprowadzeniu rozwiązania do zastosowania *tricków* olimpijskich. Stąd w rozwiązaniach uczniowskich tych zadań, można znaleźć interesujące sposoby podejścia uczniów do zagadnień matematycznych, a na ich podstawie opisać proces rozwiązywania zadań. Bardzo ważną przyczyną zajęcia się zadaniami geometrycznymi było silne przekonanie, że geometria odgrywała i odgrywa bardzo istotną rolę w kształceniu wyobraźni i intuicji uczniów.

Z kolei zadania o nierównościach są stałym i ważnym składnikiem zestawów olimpijskich. Impulsem do badania rozwiązań zadań tego typu, było pojawienie się wśród uczestników OM pewnej mody na nierówności, która związana była z wydaniem szeregu pozycji książkowych o tej tematyce.

Ważną częścią pracy było rozpoznanie strategii rozwiązywania zadania (wyboru właściwych strategii ze względu na prostotę, poprawność, skuteczność oraz powiązanie strategii z istotnymi problemami w jej realizacji). W trakcie badań obserwowałem związki między wyborem strategii rozwiązywania zadania i treningiem olimpijskim, jakiemu został poddany uczeń. Poddałem analizie także związki między stosowanymi metodami rozwiązywania zadań, znajomością literatury *olimpijskiej* i miejscem nauki. Wiadomo, że dostrzegalna jest wyraźna dominacja (gdy chodzi o liczbę uczestników II i III etapu Olimpiady Matematycznej) uczniów *stajni olimpijskich*, czyli szkół, w których kładzie się większy nacisk na kształcenie uczestników olimpiad (o czym świadczy między innymi program nauczania matematyki oraz bogata oferta dodatkowych zajęć).

Już w 1975 roku Ireneusz Białecki w pracy [1] pisał:

> *Wśród laureatów bardzo wielu kończyło renomowane szkoły, znane z dobrych nauczycieli, wychowawców wielu zwycięzców i wyróżnionych. Fakt ten, tylko częściowo można wyjaśniać tym, że do lepszych szkół przyjmowani są uczniowie zdolniejsi. Wskazuje on również na duże znaczenie poziomu szkoły, a co za tym idzie sposobu przygotowania do startu w olimpiadzie. (...) Mówi się nawet o pojawieniu się wśród startujących specjalnej kategorii „profesjonalistów", którzy przez długi czas trenują rozwiązywanie zadań, korzystając z wydawanego corocznie zbioru zadań olimpijskich.*

Badałem także błędy, jakie popełniali uczniowie oraz przyczyny powstawania tych błędów. W związku z tym, że zadania OM nie są typowymi zadaniami szkolnymi, a uczestnicy OM – typowymi uczniami, pojawiła się potrzeba stworzenia nowej typologii błędów, bardziej użytecznej do opisu błędów uczestników OM niż tradycyjne typologie.

W swojej pracy analizowałem także trudności, które prowadziły do błędów. Rozpoznanie przyczyn błędów prowadzi do próby wskazania metod ich poprawienia oraz wskazania sposobów unikania określonych błędów w przyszłości. Chodzi tu zarówno o pomoc skierowaną do uczniów, jak i do nauczycieli pracujących z młodzieżą uzdolnioną oraz osób układających i oceniających zadania OM. Szereg błędów, jakie pojawiały się w rozwiązaniach uczniów startujących w OM, mógł być spowodowany niewłaściwym podejściem nauczycieli do pracy z uczniem zdolnym. Wyrażam nadzieję, że moje spostrzeżenia pozwolą na opracowanie systemowych rozwiązań, których w tej chwili nie ma – każdy nauczyciel pracujący z uczniami uzdolnionymi opiera się głównie na swojej intuicji i własnych doświadczeniach.

Stąd wynikał inny, ważny cel pracy: stworzenie pewnego rodzaju materiału źródłowego dla nauczycieli. Przeczytałem starannie 1959 prac uczniowskich i opisałem – ze stosownymi komentarzami – wszystkie sposoby, jakimi uczniowie atakowali poszczególne zadania. Wyciągnąłem z tego konkretne wnioski dydaktyczne.

Moja praca jest matematyczna i dotyczy matematyki. Nie zajmowałem się bardzo interesującym socjologicznie zagadnieniem późniejszych losów olimpijczyków oraz wpływem sukcesów olimpijskich na dokonania naukowe. Warto wspomnieć, że taką analizę na temat uczestników pierwszych 22 olimpiad przeprowadził Ireneusz Białecki w pracy *Funkcjonowanie olimpiad matematycznych* [1]. Z kolei Andrzej Schinzel [5] opisał ogólnie tę kwestię w odniesieniu do pierwszych 50 edycji OM.

3.1. Wyniki badań

Poniżej przedstawiam wyniki moich badań oraz wnioski, które – mam nadzieję – przyczynią się do udoskonalenia Olimpiady Matematycznej.

1. Uczniowie startujący w Olimpiadzie Matematycznej wykazali się dobrą znajomością twierdzeń i metod, zarówno w przypadku zadań z geometrii, jak i zadań na dowodzenie nierówności.

2. Zawodnicy na ogół dobrze znali ogólne strategie heurystyczne, ale znacznie gorzej posługiwali się strategiami szczegółowymi.

3. Dominującą strategią, z jakiej korzystali uczniowie (niezależnie od działu, z jakiego było zadanie), była strategia sprowadzania rozwiązania zadania do zastosowania jednej metody *olimpijskiej* lub jednego twierdzenia *olimpijskiego*. Strategia ta nie jest tożsama z metodą heurystyczną *sprowadź zadanie do zadania pokrewnego*, o jakiej pisze Polya [3], [4].

Polya miał na myśli poszukiwanie rozwiązań analogicznych, podobnych do rozwiązań znanych zadań. W przypadku olimpijczyków należy raczej mówić o zastosowaniu narzędzia, które daje natychmiastowy wynik, co należy uznać za zjawisko negatywne.
W trakcie tworzenia zadań należy zatem zwracać uwagę, aby zadania nie dawały się rozwiązać poprzez zastosowanie jednego *tricku* olimpijskiego (w przypadku zadań geometrycznych chodzi przede wszystkim o wyeliminowanie zadań, które łatwo można rozwiązać poprzez zastosowanie metody analitycznej lub liczb zespolonych).
Strategię stosowania metody analitycznej i liczb zespolonych w zadaniach geometrycznych można uznać za szczególny przypadek strategii sprowadzania rozwiązania zadania do pewnego schematu. Jednakże skuteczność uczniów stosujących tę strategię jest bardzo mała.
Ze względu na faktyczne wyeliminowanie możliwości stosowania metody analitycznej i liczb zespolonych, dobór zadań geometrycznych 57. i 58. OM należy uznać za bardzo dobry. Taką regułę doboru należy zachować także w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej.

4. George Polya dzielił rozwiązywanie zadania na fazy: zrozumienie zadania, ułożenie planu, wykonanie planu, sprawdzenie. W przypadku bardzo wielu analizowanych prac wyraźnie widoczny był brak świadomości, że sprawdzenie rozwiązania i refleksja nad nim jest niezbędnym elementem poprawnie przeprowadzonego procesu rozwiązania.

5. Potrzebna jest mentalna zmiana w podejściu zarówno nauczycieli, jak i uczniów: należy zmienić sposoby kształcenia uczniów utalentowanych matematycznie i biorących udział w Olimpiadzie Matematycznej.
Główny nacisk nie powinien być kładziony na uczenie stosowania typowych *wytrychów olimpijskich* (twierdzeń, metod), gdyż to prowadzi do prób sprowadzania rozwiązywania zadań do odtwórczego i automatycznego stosowania tychże metod oraz algorytmizacji procesu rozwiązywania zadań olimpijskich. Należy skupić się na kształceniu umiejętności stosowania strategii ogólnych, a w dalszej kolejności strategii szczegółowych. Zwłaszcza, że rzecz nie jest w skuteczności stosowania przez uczniów takich *wytrychów*, ale w tym, że głównym celem OM jest wyławianie talentów i kształtowanie przyszłych matematyków. Niedostatki w kształceniu u uczniów twórczego podejścia do rozwiązywania zadań i problemów mogą mieć niepokojące konsekwencje.

6. Obserwując historię OM, można zauważyć, że zmniejsza się rola zadań geometrycznych, a zwłaszcza zadań stereometrycznych, w konstrukcji

zestawów zadań na poszczególne etapy OM. Powiązane jest z tym, na zasadzie sprzężenia zwrotnego, także słabsze przygotowanie zawodników do rozwiązywania zadań geometrycznych. W analizowanych olimpiadach zadania tego typu były dla uczniów trudniejsze niż zadania na dowodzenie nierówności (mimo, że zadania na dowodzenie nierówności wymagały specyficznej, specjalistycznej wiedzy). Wyraźny jest związek posiadanej przez uczniów wiedzy z publikacjami *olimpijskimi* z zakresu geometrii i nierówności oraz ze zmianami treści matematycznych programów nauczania matematyki w gimnazjach i szkołach ponadgimnazjalnych. Najlepsze wyniki w zadaniach geometrycznych osiągają uczniowie XIV LO w Warszawie, co związane jest z nietypowym i rozbudowanym programem kształcenia geometrycznego.

7. Charakterystyczne jest, że wraz z usuwaniem konstrukcji geometrycznych z programów szkolnych, zanika u uczniów startujących w Olimpiadzie Matematycznej umiejętność i potrzeba wykonywania precyzyjnych rysunków geometrycznych. Ma to odzwierciedlenie w niestarannych rysunkach oraz błędach, jakie są konsekwencją tych rysunków. Na podstawie źle przygotowanych rysunków uczniowie wyprowadzają wnioski, które są fałszywe. Na podstawie rysunku dla jednej sytuacji (czasami sytuacji szczególnej, regularnej) dostrzegają fakty charakterystyczne tylko dla danej sytuacji i traktują je jak ogólne. Nie jest to zjawisko powszechne, ale wyraźnie dostrzegalne.
   Można zauważyć, że zanikają także takie umiejętności powiązane z rozwiązywaniem zadań konstrukcyjnych, jak analiza liczby rozwiązań i dowód poprawności konstrukcji.

8. Zadania z geometrii przestrzennej stanowiły dla zawodników poważny problem. W zawodach finałowych 57. i 58. OM (w każdej edycji było jedno takie zadanie) tylko siedmiu uczniów rozwiązało zadania tego typu. Zwraca uwagę fakt, że byli to uczniowie tylko z czterech szkół: II LO w Krakowie, XIII LO w Szczecinie, XIV LO w Warszawie, VI LO w Bydgoszczy.
   Zawodnicy mieli kłopot z postrzeganiem analogii między geometrią płaszczyzny i przestrzeni. Na zasadzie analogii z faktów prawdziwych w geometrii płaszczyzny błędnie wnioskowali, bez sprawdzenia, o istnieniu związków między obiektami w przestrzeni. Bywały także problemy odwrotne: dobrze znane fakty z geometrii płaskiej nie miały dla nich analogii w przestrzeni. Dobrym przykładem tego zjawiska był problem w zadaniu 5 z 3 etapu 57. OM: twierdzenie o odcinkach stycznych do

okręgu, bardzo dobrze znane i stosowane przez olimpijczyków w zadaniu z geometrii płaskiej, było słabo rozpoznawalne w przestrzeni.

Zastanawiające, że uczniowie często nie próbowali weryfikować swoich pomysłów przez sprawdzenie własności charakterystycznych figur przestrzennych czy też poprzez podanie lub poszukanie konfiguracji nie pasującej do ich koncepcji.

Wielką trudnością w rozwiązywaniu zadań stereometrycznych był brak umiejętności sporządzania właściwego rysunku. Ten fakt implikował brak możliwości dostrzegania zależności między elementami figury przestrzennej. Często powodował także dostrzeganie zależności, których nie było.

9. Widoczne w rozwiązaniach zadań jest zjawisko odtwarzania wiedzy z podręczników, które zawodnicy uznają za *standard olimpijski*. Charakterystyczne, że taki standard *obowiązuje* wśród uczniów w zakresie dowodzenia nierówności (przede wszystkim książki Lva Kourliandtchika) i brak jest takiego standardu w zakresie geometrii (głównie ze względu na brak pozycji, w których znajdowałby się przegląd technik olimpijskich z tego zakresu).

   Warto dodać, że literatura matematyczna była traktowana przez sporą część uczniów jako zbiory twierdzeń i metod, których automatyczne zastosowanie gwarantuje sukces w rozwiązywaniu zadań OM.

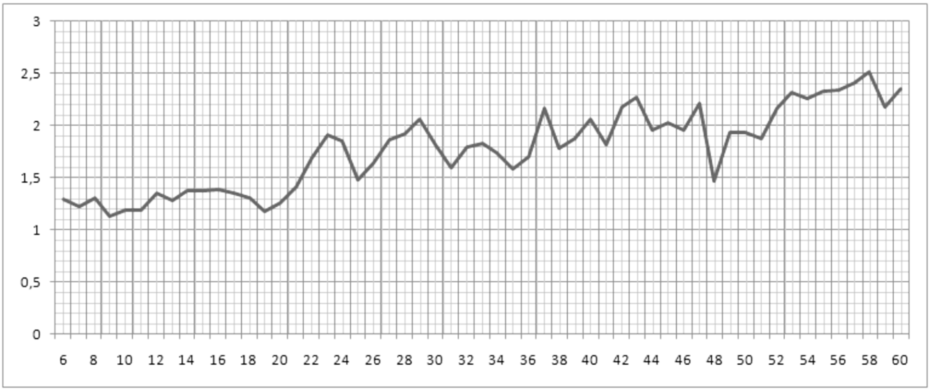
10. Poważnym problemem, większym niż wydaje się przy pobieżnej obserwacji, było popełnianie przez uczniów błędów świadomych i błędów powierzchownej wiedzy. Błędy te były charakterystyczne przede wszystkim dla prac uczestników drugich etapów i wynikały zapewne z ambicji uczniów przedstawienia rozwiązań (mimo braku pomysłu na nie), które dadzą awans do finału.

11. Zawody II stopnia dobrze selekcjonowały finalistów Olimpiady Matematycznej. Finaliści OM cechowali się wysokim stopniem samooceny oraz umiejętością wykrywania błędów i luk w swoich rozumowaniach. Prace finalistów charakteryzowały się mniejszą (w stosunku do prac z II etapu) liczbą błędów powierzchownej wiedzy, blefów, a także świadomym doborem strategii i prezentacją prostych, pomysłowych rozwiązań, w których zawodnicy rzadko wykorzystywali *tricki* olimpijskie.

12. Moje badania potwierdziły stereotypowe sądy o umiejętnościach matematycznych dziewcząt: we wszystkich analizowanych zadaniach II etapów dziewczęta statystycznie gorzej radziły sobie z rozwiązywaniem tych

zadań oraz częściej niż chłopcy były bezpodstawnie przekonane o poprawności swoich rozwiązań.
W przypadku etapu III, wobec małej liczby dziewcząt, nie można wyciągać wniosków ogólnych.

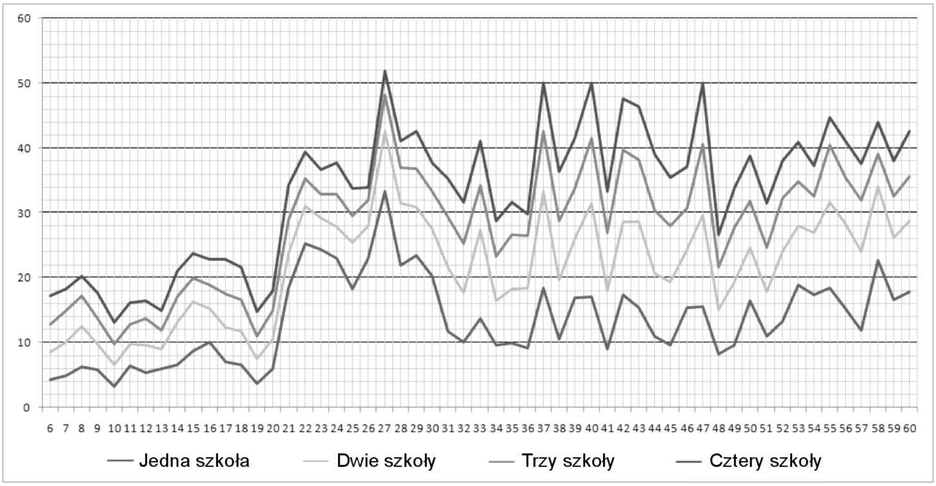
13. Zwiększa się rola szkół wiodących pod względem liczby uczestników II i III etapu OM.
Wykresy na rysunkach 1 i 2 pokazują stałą tendencję: stale wzrasta stosunek liczby uczestników finałów do liczby szkół, z których pochodzili uczestnicy. Oznacza to zwiększanie znaczenia grupy szkół, które prowadziły specjalny trening olimpijczyków oraz zmniejszanie się szans awansu do finału pojedynczych uczniów ze szkół, które nie prowadziły takiego treningu.



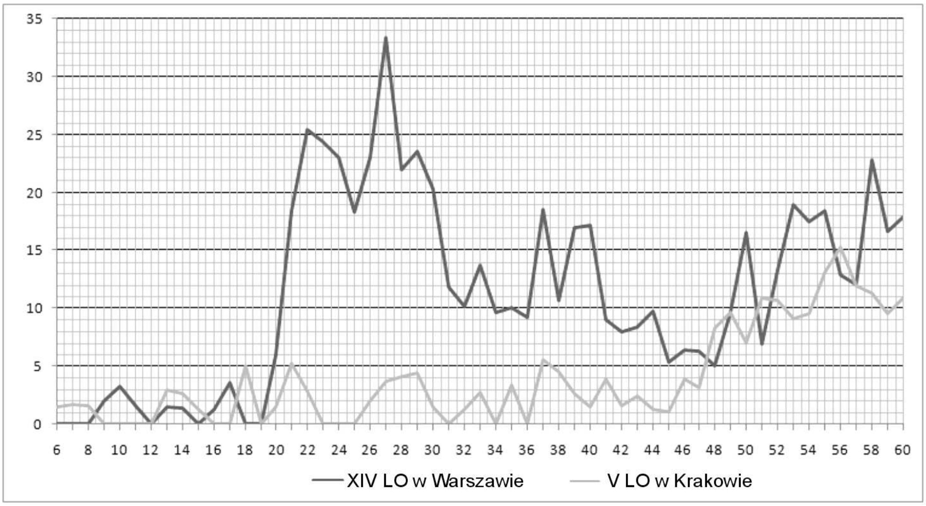
Rys. 1. Stosunek liczby uczestników finałów OM do liczby szkół, z których pochodzili; na osi odciętych numer OM, na osi rzędnych iloraz liczby uczestników i liczby szkół

Na rysunku 2 można zaobserwować, że w ciągu pierwszych 20 Olimpiad Matematycznych nie występowało w zasadzie zjawisko *stajni olimpijskich*. W okresie tym najliczniej reprezentowana szkoła miała od 5% do 10% uczestników finałów, a cztery najliczniej reprezentowane szkoły w sumie nie miały więcej niż 24% uczestników finałów.
W okresie od 20. do 30. OM wyraźnie zaznaczona była dominacja jednej szkoły: XIV LO w Warszawie. Liczba uczniów tej szkoły przekraczała 20% liczby uczestników finałów, a na 27. OM uczniowie XIV LO stanowili 33% finalistów.

Od 37. do 47. OM obserwowano wzrost znaczenia kilku szkół; cztery najliczniej reprezentowane szkoły miały w sumie od 40% do 50% finalistów.



Rys. 2. Procent uczniów w poszczególnych finałach OM pochodzących z jednej, dwóch, trzech, czterech najlepszych szkół



Rys. 3. Udział procentowy uczniów XIV LO z Warszawy i V LO z Krakowa w finałach OM

Począwszy od 48. OM zaznacza się dominacja dwóch szkół: XIV LO w Warszawie i V LO w Krakowie (rys. 3, tabela 12).

Dokonując dokładnej analizy, można zauważyć, że istnieją szkoły, które w historii olimpiady odgrywały istotną rolę, ale straciły swoje znaczenie w ostatnich latach. Do takich szkół należą: I LO w Gdańsku, II LO w Lublinie, IX LO w Warszawie, VI LO w Warszawie, I LO w Lublinie,

I LO w Krakowie, XII LO w Łodzi, I LO w Łańcucie. Bardzo często pojawienie się silnej matematycznie szkoły lub jej zanik wiąże się ściśle z pracą lub zakończeniem pracy wybitnego nauczyciela-entuzjasty.
Na przykładzie uczniów XIV LO z Warszawy, V LO w Krakowie oraz pozostałych uczniów widać istotną korelację między programami nauczania i sposobami ich realizacji, a wynikami w OM.
Roli *stajni olimpijskich* nie da się oceniać jednoznacznie negatywnie czy pozytywnie. Uczniowie tych szkół mieli znacznie lepszą wiedzę na temat rozwiązywania zadań olimpijskich niż ich rówieśnicy w innych szkołach; sprawnie stosowali schematy i metody charakterystyczne dla zadań olimpijskich. Fakt, że popełniali więcej błędów powierzchownej wiedzy i blefów wynikał z ich większej wiedzy i silniejszej motywacji związanej z sukcesem olimpijskim.
Negatywnym aspektem istnienia takich wiodących szkół było ograniczenie szans w OM uczniów z miejscowości, w których nie ma tego typu szkół. Z mojej analizy wynika, że uczniowie uzdolnieni matematycznie, ale pozbawieni szczególnej opieki olimpijskiej, mieli mniejsze szanse na awans do finału OM niż uczniowie posiadający taką opiekę.

Tabela 12. Liczba uczestników finałów ze szkół, które od 50. OM do 60. OM miały co najmniej 20 finalistów

Szkoła	Liczba finalistów
XIV LO w Warszawie	201
V LO w Krakowie	137
XIV LO we Wrocławiu	68
IV LO w Toruniu	57
XIII LO w Szczecinie	57
III LO w Gdyni	52
III LO we Wrocławiu	35
V LO w Bielsku-Białej	34
VI LO w Bydgoszczy	28

14. Warunki sprzyjające powstaniu *stajni olimpijskich*:
    (a) formalna lub nieformalna współpraca z pracownikami wyższych uczelni,
    (b) silne związki z jednym, wybranym gimnazjum (w niektórych sytuacjach jest to nawet jeden zespół szkół), w którym uczniowie poddawani są treningowi olimpijskiemu (często przez nauczycieli z tychże *stajni*),

(c) obecność w szkole co najmniej jednego nauczyciela pasjonującego się pracą z uczniem zdolnym (bardzo często odejście z pracy takiego nauczyciela powoduje gwałtowny spadek liczby uczestników OM z tej szkoły),
(d) specjalny sposób naboru do klas z poszerzonym programem nauczania matematyki,
(e) program nauczania matematyki znacznie odbiegający od powszechnie obowiązujących programów,
(f) indywidualne programy nauczania dla najwybitniejszych uczniów, organizacja warsztatów i obozów matematycznych (które często prowadzą dawni olimpijczycy, będący absolwentami tych szkół).

15. Charakterystyczny jest brak silnych szkół olimpijskich w wielkich miastach i ośrodkach akademickich: Łodzi, Poznaniu, Gdańsku. Przyczyn należy szukać w braku spełnienia większości warunków z punktu poprzedniego.

16. Na przykładzie prac uczniów XIV LO w Warszawie można dostrzec pozytywne efekty treningu olimpijskiego: uczniowie sprawnie posługiwali się typowymi strategiami rozwiązywania zadań, umiejętnie korzystali ze strategii szczegółowych, charakterystycznych dla określonego typu zadań, wykazywali się dobrą znajomością twierdzeń i metod. I wreszcie widoczna była duża skuteczność w rozwiązywaniu zadań olimpijskich – znacznie większa niż w przypadku uczniów z innych szkół; dotyczyło to zwłaszcza zadań z geometrii płaskiej.

17. Wskazane jest podjęcie działań systemowych polegających na stworzeniu w większych miastach zespołów nauczycieli i pracowników naukowych zajmujących się kształceniem uczniów uzdolnionych matematycznie. Podniesie to poziom kształcenia matematycznego tych uczniów i jednocześnie zwiększy szanse na sukces olimpijski uczniów z miejscowości, w których obecnie nie ma takiej działalności.

    W historii OM występuje wiele szkół, w których co jakiś czas pojawiają się finaliści OM. Dosyć częstym zjawiskiem jest pojawianie się w tych szkołach jednocześnie dwóch finalistów. Wzmacnia to tezę, że spotkanie w jednej szkole kilku uczniów zainteresowanych OM powoduje wzajemne inspirowanie i naukę, co przekłada się na sukces olimpijski.

18. Moje badania pokazały, że rozwiązania eleganckie i pomysłowe były charakterystyczne dla dwóch typów zawodników uczestniczących w Olimpia-

dzie Matematycznej: zajmujących najwyższe lokaty oraz takich, którzy nie awansowali do finału.

W przypadku zawodników najlepszych elegancja i pomysłowość rozwiązań wynikała z rozległej wiedzy oraz umiejętności głębokiego wejrzenia we własności obiektów występujących w zadaniu.

W przypadku uczniów, którzy nie awansowali do finału, raczej chodziło o luki w wiedzy uzupełnione pomysłowością i intuicją.

Dlatego uważam, że uczniów prezentujących takie pomysłowe rozwiązania powinno się dołączać do grona finalistów z wykorzystaniem tzw. *dzikiej karty*. Umożliwi to docenienie uczniów o niezbyt dużej wiedzy, ale kreatywnych i obdarzonych niewątpliwym talentem matematycznym.

19. Kolejna propozycja dotyczy umieszczania w zestawach zadań II etapu zadań będących pewnymi wariacjami na temat zadań I etapu, nad którymi uczniowie mieli okazję popracować w domu.

    Uczeń, który rozwiązał zadanie z I etapu, dobrze zrozumiał istotę swojego rozwiązania, zastanowił się nad uogólnieniami, wymyślił lub znalazł w literaturze techniki rozwiązywania podobnych zadań, zdecydowanie łatwiej poradzi sobie z zadaniem z II etapu, które jest przedłużeniem lub uogólnieniem zadania z etapu pierwszego. Zadania z etapu pierwszego będą wówczas pewnego rodzaju wskazówką, z jakimi zagadnieniami warto się zapoznać. Dzięki takiemu ukierunkowaniu nastąpi wyrównanie szans uczniów o podobnych uzdolnieniach.

20. Wnioski do dalszych badań: w swojej pracy analizowałem zadania 57. i 58. Olimpiady Matematycznej na dowodzenie nierówności, zadania z geometrii płaskiej i przestrzennej. Bardzo interesujące byłoby przeanalizowanie pozostałych zadań z tych olimpiad, zwłaszcza, że wśród nich występują zadania o różnorodnej tematyce, z wielu dziedzin matematycznych. Ponadto warto prowadzić badania nad rozwiązaniami zadań z bieżących OM. Badania takie mogą pokazać bardziej wyraziście tendencje i korelacje, jakie opisałem w mojej rozprawie.

    Wobec wyników mojej pracy, wskazujących na istotny wpływ nauczyciela na ucznia w procesie kształcenia olimpijskiego, należy podjąć temat przygotowania studentów pragnących podjąć pracę w szkole (oraz nauczycieli) do pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie.

Bibliografia

1. Białecki I., 1975, *Funkcjonowanie olimpiad matematycznych*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław
2. Dymel J., Niedźwiedź M., 2007, Polish Mathematical Olympiad for Teenagers, *Mathematics Competition*, **20**, 1, Canberra
3. Polya G., 1975, *Odkrycie matematyczne*, WNT, Warszawa
4. Polya G., 1993, *Jak to rozwiązać*, PWN, Warszawa
5. Schinzel A., 2000, Pięćdziesiąt lat Olimpiady Matematycznej, *Wiadomości Matematyczne*, **36**.
6. *Sprawozdania Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej*, numery: 1-57, Warszawa 1951-2008
7. Szurek M., 2006, *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, tomy 1-8, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk

DYSKUSJA

Doktor Krzysztof Ciesielski (Uniwersytet Jagielloński) – Chciałbym dodać parę uwag... Nie zgodzę się ze sformułowaniem, że uczniowie nie znali twierdzenia o odcinkach stycznych w wersji przestrzennej. Uważam, że to jest zbyt daleko idący wniosek. Można powiedzieć, że oni z tego nie skorzystali, może nie zauważyli możliwości wykorzystania takiego twierdzenia. Nawet, jeżeli uczestnik dowodził tego faktu, to moim zdaniem nie oznacza, że go nie znał; mógł go po prostu nie mieć w szkole. Niejeden uczestnik Olimpiady redaguje pracę na zasadzie: „to miałem w szkole, więc mogę z tego skorzystać, a tego nie miałem w szkole, więc czuję się w obowiązku to udowodnić". Może podam przykład. W rodzinie mam takiego młodego człowieka, który ongiś w pewnym konkursie gimnazjalnym miał do rozwiązania między innymi dwa zadania, w których się wykorzystywało ten sam trik. I w jednym zadaniu zauważył, że z tego triku można skorzystać, zresztą w trudniejszym przypadku, a w prostszym tego nie zauważył. Sądzę zatem, że wniosek, że uczestnicy nie znali konkretnego twierdzenia wyciągnięty na podstawie tego, że go nie wykorzystali lub je dowodzili, jest chyba zbyt pochopny.

Teraz sprawa finalistów z „Piątki". Uważam, że jeśli chodzi o te liczby, to tu odgrywa rolę jeszcze wiele innych czynników. Mianowicie, w Krakowie w V LO klasa uniwersytecka zaczęła działać od 24. Olimpiady, a na wykresie widzimy, że dopiero dwadzieścia lat później uczniowie V Liceum zaczęli odnosić sukcesy aż w tak dużej liczbie. Otóż, wtedy właśnie, niezależnie od klasy uniwersyteckiej, zaczęły działać uniwersyteckie kółka olimpijskie, i to ich praca odgrywa tu wiodącą rolę. Kółka oczywiście są nie tylko dla V LO, ale ważny jest też inny czynnik... Jest tu bardzo duża zasługa tych „samonapędzających się" rankingów licealnych budowanych w oparciu o sukcesy olimpijskie. Po prostu, to jest samonapędzająca się maszynka. Rankingi są budowane w oparciu o sukcesy olimpijskie, w związku z czym dobrzy ludzie idą do tej szkoły, która ma wysokie miejsce w rankingu i oni dają szkole jeszcze większe sukcesy olimpijskie itd., itd. Wydaje mi się, że to ma bardzo istotne znaczenie.

Nie wiem, jak jest w przypadku Staszica, ale uważam, że w Krakowie, w przypadku „Piątki", oprócz paru znakomitych nauczycieli, którzy tam uczą, kółek i roli szkoły, ten fakt też ma duże znaczenie.

Jeszcze taka uwaga – wspomniałeś o moich zasługach przy tworzeniu tych kółek, ale sądzę, że na to nie zasłużyłem; o ile pamiętam, jedynie ewentualnie to wspierałem, ale inicjatorami powstania kółek byliście jednak Armen Edigarian i Ty; na wymienienie jako pomysłodawca tych kółek nie zasługuję.

I jeszcze dwie uwagi. Jedna, *a propos* tej nierówności Muirheada. Miałem z tym do czynienia jako poprawiający te zadania w Krakowie; żeby być precyzyjnym, ci uczniowie w Krakowie nie korzystali z nierówności Muirheada, oni korzystali z nierówności – i tam było jakieś nazwisko, chyba w każdej pracy inna wersja, permutacja rozmaitych liter. Oczywiście chodziło o nierówność Muirheada, ale nie wydaje mi się, żeby były dwie prace, w których to nazwisko byłoby identycznie napisane i nie przypominam sobie, żeby gdzieś było napisane poprawnie. I drugi komentarz. W danych z ankiet podane było, że 5% nauczycieli uznało, że Olimpiada Matematyczna jest za łatwa. Bardzo bym chciał obejrzeć całe ankiety tych 5%, którzy uznali, że Olimpiada jest za łatwa.

Doktor Jacek Dymel – Może jeszcze tylko o roli Krzysztofa Ciesielskiego. Edmund Puczyłowski wczoraj mówił o roli przypadków. Idąc na studia, w ogóle nie planowałem kariery nauczycielskiej. Co więcej, zarzekałem się, że nie będę nauczycielem. Na IV roku właśnie Krzysztof przyszedł do mnie i do Armena Edigariana z propozycją, żebyśmy zaczęli prowadzić kółko. I zaczęliśmy robić to kółko i wtedy postanowiłem, że będę nauczycielem. I to jest ta rola przypadku w życiu.

Doktor Eugeniusz Śmietana (I LO Łańcut) – Chciałem podziękować Panu Doktorowi za te informacje dotyczące 57. i 58. Ogólnopolskiej Olimpiady Matematycznej, ale nie wszystkie wnioski były trafne, ponieważ są pewne nieścisłości. Dlatego chciałbym wprowadzić taką małą korektę przez podanie konkretnych informacji. Od 25-ciu lat uczę w I LO w Łańcucie i od 25-ciu lat organizuję Konkursy Matematyczne im. prof. Jana Marszała. Najpierw były to konkursy regionalne, a od 10-ciu lat jest to konkurs wojewódzki pod patronatem Podkarpackiego Kuratora Oświaty i PTM Oddział w Rzeszowie. Konkurs jest trzyetapowy na wzór Ogólnopolskiej Olimpiady Matematycznej. Po śmierci prof. Marszała – nie znałem osobiście prof. Marszała, ale wiele o nim słyszałem jako uczestnik olimpiady matematycznej – postanowiłem oddać hołd temu wielkiemu nauczycielowi, co czynię do dzisiaj wspólnie z grupą ludzi oddanych temu przedmiotowi. Jest to wielkie święto dla naszej szkoły i całego województwa podkarpackiego. Informacje są na stronie internetowej szkoły. W tym czasie na II stopniu olimpiad matematycznych było ponad 70 olimpijczyków z I LO w Łańcucie, a także nagrodzonych i wyróżnionych. Mieliśmy również laureatów trzeciego miejsca, a mój uczeń był dwukrotnym zwycięzcą konkursów Polska-Austria. Miałem 7 finalistów. Za osiągnięcia swoich uczniów otrzymałem dwukrotnie Medal Pięćdziesięciolecia i Sześćdziesięciolecia Olimpiad Matematycznych. Takim medalem wyróżniono także I LO w Łańcucie. Oczywiście, że nie jest to dużo, ale jest praca z uczniem zdolnym, jest olbrzymia praca. Uczeń szuka konkurencji, szkoły, nauczycieli pasjonatów. Robi się to w województwie podkarpackim, jest tam kilka innych konkursów matematycznych. Od ubiegłego roku organizuję Międzynarodowy Matematyczny Konkurs Euroregionu im. prof. Jana Marszała. W zawodach startowało 6 państw. W tym roku będzie prawdopodobnie osiem drużyn zagranicznych. A zatem osiągnięcia organizacyjne i matematyczne są godne podkreślenia. Oczywiście uczeń chce być motywowany, co jest oczywiste, ale szuka się też dla niego innych motywacji. Na przykład w naszym konkursie było tak, że laureaci konkursów mieli pewne preferencje na uczelnie wyższe, na uczelnie krakowskie i rzeszowskie. Otrzymywali zaświadczenia zapewniające im indeks na AGH w Krakowie, Politechnikę Krakowską oraz Politechnikę Rzeszowską. Jest to duża zachęta dla uczestników Konkursów Matematycznych im. prof. Jana Marszała, mimo że ten uczeń na pewno zdałby egzamin niezależnie od jego trudności. Po pierwsze, dla tego ucznia bardzo ważne są fakty: otrzymanie dyplomu, zaświadczenia i nagrody rzeczowej na wyjątkowej uroczystości zakończenia konkursu. Po drugie, po takim konkursie musi pozostać ślad. Dlatego też – co nieskromnie powiem – napisałem dwie książki w formie sprawozdań, teraz będzie trzecia, bo w ubiegłym roku był jubileusz 25-lecia Konkursów Matematycznych im. prof. Jana Marszała. Ponadto wydałem książkę w formie zbioru zadań pt. „500 zadań i matematycznych problemów dla uzdolnionej młodzieży". Prowadzę również kronikę osiągnięć w konkursach i olimpiadach matematycznych. A co przyszłość pokaże? Zobaczymy! Praca pozalekcyjna jest, uczniowie są chętni do rozwiązywania matematycznych zagadnień. Podam tylko statystycznie, że w roku ubiegłym w etapie trzecim, czyli już wojewódzkim, Konkursu Matematycznego im. prof. Jana Marszała wzięło udział 170 uczniów, a na etapie pierwszym, czyli szkolnym, wystartowało 1150 uczniów szkół średnich z 47 szkół. A zatem zainteresowanie szkół, uczniów i nauczycieli jest olbrzymie, podobnie jak praca z uczniem zdolnym. Dziękuję bardzo za uwagę.

Doktor Jacek Dymel – Odpowiedź taka. Analizowałem dane dotyczące wyłącznie Olimpiady Matematycznej. Nie analizowałem konkursów w mojej pracy. To nie był mój rejon zainteresowań. Dlaczego wspomniałem o I Liceum w Łańcucie? Bo dokonania Pana prof. Marszała są znane. Tu wymieniłem takie szkoły, które w tamtych czasach miały istotne znaczenie ilościowe w Olimpiadzie, a w tej chwili straciły to znaczenie. Nie neguję obecnych sukcesów, mówiłem tylko o kwestiach ilościowych na przestrzeni lat.

METODY I MATERIAŁY DO PRACY Z UCZNIEM ZDOLNYM

Tomasz Szymczyk

V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Szanowni Państwo! Przyjechałem z Bielska-Białej, miasta na południu Polski. Nie jest ono małe, ale nie jest też ośrodkiem uniwersyteckim. Jako nauczyciele nie mamy takiego wsparcia ze strony szkół wyższych, jakie mogą mieć nasi koledzy z Warszawy, Krakowa, Wrocławia czy Torunia.

Chciałbym dziś opowiedzieć o pracy z uczniem zdolnym, zaprezentować moje metody, wskazać źródła, z których czerpię materiały i pomysły na zajęcia.

Kto to jest uczeń zdolny, można przeczytać w różnych publikacjach. Czy uczniowi zdolnemu trzeba pomagać? Można często usłyszeć opinię: „uczeń zdolny da sobie radę”. Tak twierdzi również wielu nauczycieli. Od moich kolegów z innych szkół bielskich nieraz słyszałem: „macie samych zdolnych uczniów, to nie musicie nic robić”. Jest to opinia nieprawdziwa. Tak jak trzeba pomóc uczniowi słabemu, aby mógł wyrównać braki swojej wiedzy, tak również należy pomóc uczniowi zdolnemu, aby do oczywistych faktów nie dochodził zbyt długo i mógł osiągnąć sukces.

1. Metody pracy z uczniem zdolnym

Nauczyciel powinien motywować swoich uczniów do nieustannego rozwoju uzdolnień matematycznych. Musi też dać uczniowi szansę na porównanie swojej wiedzy i umiejętności z uczniami z innych szkół, z innych miejscowości.

Jakie są formy pracy z uczniem zdolnym? Chyba najpopularniejszymi z nich są koła matematyczne, prowadzone niemal w każdej szkole. Zwykle skupiają uczniów danej szkoły na jednym poziomie. Czasem tworzone są koła międzyszkolne – takie zajęcia prowadzi w Krakowie Uniwersytet Jagielloński. Myślę, że w innych ośrodkach uniwersyteckich można znaleźć podobne oferty. Jest to najlepsza forma koła zainteresowań dla uczniów zdolnych. Chodzi o to, aby nie byli oni wyłącznie wśród kolegów ze swojej szkoły. Jeżeli natomiast tworzy się koła w ramach jednej klasy, to jest to rozwiązanie złe. Ale ostatnio o takich też słyszałem.

Praca w kole matematycznym, to wspólna praca nauczycieli i uczniów. Moim zdaniem, po początkowych zajęciach prowadzonych przez nauczyciela, powinien on stać się koordynatorem, aby coraz więcej zajęć prowadzili – pod jego kierunkiem – uczniowie.

Druga formą są wykłady. Mogą one być prowadzone systematycznie lub okazjonalne. W Warszawie wykładów systematycznych jest więcej. U nas, niestety, takich spotkań nie ma. W Bielsku-Białej organizujemy dla uczniów i nauczycieli tylko jedną taką akcję w czerwcu. Zapraszamy gości, aby opowiedzieli naszym wychowankom o matematyce olimpijskiej. Nie ma natomiast zainteresowania taką formą zajęć dla uczniów ze strony pracowników naukowych bielskich uczelni.

Kolejną formą pracy z uczniem zdolnym są warsztaty matematyczne. Pierwszymi – o których usłyszałem – były warsztaty prowadzone wspólnie przez obecnego tutaj profesora Wojciecha Guzickiego (Uniwersytet Warszawski) i Waldemara Rożka (nauczyciela LO w Stalowej Woli). Przed kilku laty, podczas jednego z finałów Olimpiady Matematycznej, z Pawłem Kwiatkowskim – nauczycielem I LO w Piotrkowie Trybunalskim – omówiliśmy założenia programowe warsztatów, a następnie zorganizowaliśmy je wspólnie dla uczniów naszych szkół. Już na następnych dołączyło do nas II LO z Krakowa, kiedy jeszcze w tym liceum uczył Jacek Dymel – wtedy były to już warsztaty trzech szkół. Kolejną szkołą, która do nas dołączyła było I LO z Krosna z nauczycielem Ewą Wierdak. Po zmianie miejsca pracy przez Jacka Dymela nie możemy już tak intensywnie współpracować w czasie warsztatów. Miejsce II LO z Krakowa, na razie jednorazowo, zajęło Liceum Sióstr Prezentek z Rzeszowa z nauczycielem Mariuszem Krausem. Mamy nadzieję, że współpraca tych szkół będzie trwała dłużej. W ciągu roku szkolnego odbywa się cykl trzech tygodniowych warsztatów. Pierwsze warsztaty odbywają się w ostatnim tygodniu sierpnia. Proszę zwrócić uwagę, że są jeszcze wakacje. Zawsze znajduje się grupa uczniów, którzy chcą w taki właśnie sposób wspólnie pracować. Jak wygląda rozkład dnia w czasie takich warsztatów?

8.15-8.45	–	śniadanie,
9.00-10.30	–	zajęcia,
11.00-12.30	–	zajęcia,

13.00-13.45	–	obiad,
14.15-15.45	–	zajęcia,
16.00-18.30	–	indywidualny konkurs zadaniowy,
18.45-19.15	–	kolacja,
19.30-20.45	–	omówienie zadań konkursowych.

Widać z tego rozkładu, że choć dla uczniów jest to tydzień bardzo intensywnej pracy, to jednak chętnie na takie warsztaty wyjeżdżają.

Jak zapewne Państwo zauważyli, codziennie rozgrywany jest indywidualny konkurs zadaniowy. Uczniowie otrzymują, tak jak na olimpiadzie, po trzy zadania. Na rozwiązanie zadań mają dwie i pół godziny. Po kolacji odbywa się omawianie zadań konkursowych. Ponieważ na warsztatach prowadzimy dwie grupy: zaawansowaną i mniej zaawansowaną, więc konkurs też rozgrywany jest w dwóch grupach. Omawianie zadań prowadzone jest w każdej grupie oddzielnie.

Na te wyjazdy staramy się zapraszać byłych uczestników: finalistów, laureatów Olimpiady, obecnie studentów. Pełnią oni funkcje kierowników naukowych. Odpowiadają za omówienie zadań konkursowych. Większość zadań, jakie pojawiają się w konkursie, to zadania, które proponują nam kierownicy naukowi. Często są one wybierane w szczególny sposób: co najmniej jedno jest tak dobrane, aby po jego omówieniu można było wygłosić jeszcze mały referat dotyczący pewnej teorii. Dzień na ogół nie kończy się o 20.45, dyskusje trwają jeszcze później.

Warsztaty trwają 6-7 dni. W jednym dniu staramy się zorganizować mecz matematyczny. To też jest pewnego rodzaju konkurs. Dla tych z Państwa, którzy wiedzą, jak mecze matematyczne wyglądają, nie będzie to nic nowego, natomiast jeżeli ktoś z takim meczem nie spotkał się, krótko opowiem, na czym ta zabawa polega. Pomysł i regulamin meczu wzięliśmy z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu. Uczniowie dzieleni są na dwie równoliczne grupy. Zadania – po jedenaście – są jednakowe dla każdej z nich. Na rozwiązanie i wspólne nauczenie się rozwiązań uczniowie mają określony czas. Na ogół po obiedzie następuje rozgrywka, czyli wywoływanie według specjalnego regulaminu kolejnych zawodników, którzy muszą wytłumaczyć rozwiązanie wybranego zadania. Wypowiedzi ocenia komisja złożona z opiekunów. Bardzo popularne są takie mecze we Wrocławiu, gdzie rozgrywany jest konkurs pod nazwą „Dolnośląskie Mecze Matematyczne”.

Drugi cykl warsztatów staramy się zorganizować w listopadzie, zaś ostatni prowadzimy w lutym, przed zawodami drugiego stopnia Olimpiady Matematycznej. Wtedy już wiemy, kto się do nich zakwalifikował. W czasie warsztatów wyodrębniona jest grupa uczestników zawodów stopnia drugiego i z nimi pracujemy oddzielnie. Z pozostałymi pracujemy w grupie mniej zaawansowanej. Staramy się, aby na warsztatach większość referatów wygłaszali uczniowie, po konsultacjach z nauczycielami jeszcze przed wyjazdem.

Organizując warsztaty, tworzymy bazę zadań do wykorzystania w czasie ich trwania. Dwukrotnie udało nam się wydać sprawozdanie po ich zakończeniu. Ukazały się broszury z warsztatów, które odbyły się w roku 2007 w Iwoniczu oraz w roku 2008 w Bielsku-Białej.

Innymi formami pracy są: obóz naukowy czy konferencja naukowa. Pewnego rodzaju wzorcem obozu naukowego jest obóz Olimpiady Matematycznej, który od niemal dwudziestu lat odbywa się w Zwardoniu. Wcześniej odbywał się chyba w Zachełmiu – mógłby to potwierdzić obecny na tej konferencji Wojciech Tomalczyk. Obozy naukowe organizują również niektóre szkoły. Także organizatorzy niektórych konkursów np. „Kangur Matematyczny”, czy „Alfik Matematyczny” nagradzają najlepszych uczestników wyjazdem na obóz naukowo-wypoczynkowy. Natomiast konferencje prowadzone są sporadycznie. Przykładem takich zajęć mogą być „Spotkania z matematyką” organizowane od wielu lat przez VIII LO w Katowicach.

Powróćmy do wykładów. Jak już powiedziałem wcześniej, w Warszawie można skorzystać z szerokiej oferty wykładów cyklicznych. Są to wykłady prowadzone m.in. przez Politechnikę Warszawską i Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej.

W marcu odbyły się pierwsze takie zajęcia, podczas których swoją wiedzą podzielili się z uczniami: prof. Wiktor Bartol, prof. Wojciech Guzicki i dr Adam Osękowski. Kolejne spotkanie odbędzie się 6 maja. Wykładowcami będą: prof. Marek Kordos, prof. Stanisław Janeczko i dr Joanna Jaszuńska.

Nie są to jedyne wykłady cykliczne, jakie odbywają się w Warszawie. Na drzwiach tej sali widzą Państwo jedno z kolejnych zaproszeń. Te wykłady odbywają się też na Politechnice Warszawskiej. Jest to tzw. MiNI Akademia Matematyki. Niestety, w małych ośrodkach coś takiego nie istnieje i tylko żałować, że takich możliwości po prostu nie mamy.

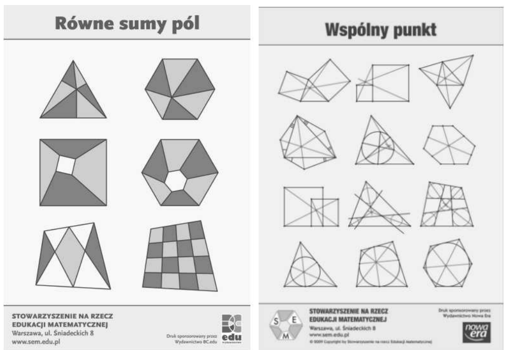
W Krakowie na Uniwersytecie Jagiellońskim odbywają się matematyczne czwartki, czyli raz w miesiącu, w czwartek pracownicy Instytutu Matematyki UJ spotykają się z uczniami i ich nauczycielami na wykładach popularnych z matematyki. Nie mam informacji, ale zapewne we Wrocławiu takie zajęcia też są organizowane. O tym mogłaby powiedzieć, również obecna na dzisiejszej konferencji, Pani Małgorzata Mikołajczyk z Uniwersytetu Wrocławskiego.

2. Materiały do pracy z uczniem zdolnym

Skąd czerpać materiały do takiej pracy? Nie podam tutaj wszystkich źródeł, bo jest to absolutnie niemożliwe. Wskażę te, z których ja i moi koledzy korzystamy.

2.1. Plakaty

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej rozpoczęło wydawanie serii plakatów. Dwa takie plakaty tutaj przedstawiam. Te obrazy na pewno intrygują. O co tu chodzi? Co to takiego jest? Otóż, okazuje się, że są to bardzo dobre zadania na kółko matematyczne.



Pierwszy plakat jest zatytułowany „Równe sumy pól” i można się łatwo domyślić, o co chodzi – suma pól ciemnych musi być równa sumie pól jasnych. Tylko, jak to teraz udowodnić? Dwa pierwsze zadania są standardowe. Drugie, w pierwszym wierszu po prawej, było tematem jednego z zadań Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Natomiast w drugim wierszu znajdują się zadania niebanalne, które wcale nie tak łatwo rozwiązać. Kto z Państwa był na pierwszej konferencji w Sulejowie, ten mógł się przekonać, bo rozwiązywał te zadania dr Waldemar Pompe.

Drugi z plakatów zatytułowany jest „Wspólny punkt”. O co w tym plakacie chodzi, też domyślić się łatwo. Tylko jak udowodnić, że odpowiednie proste przecinają się w jednym punkcie? Co jest ciekawego w tym drugim plakacie? Otóż, w każdym wierszu przedstawiono inną metodę rozwiązania danego zdania. Jak widać, plakaty te są świetnym materiałem do pracy z uczniem zdolnym.

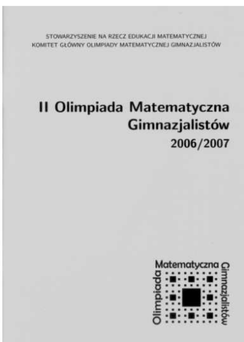
Materiały konferencyjne. Po konferencjach w Sulejowie, o których już była mowa również wczoraj, są zebrane materiały. Dostępne są one na stronach internetowych tych konferencji:

- `http://www.mimuw.edu.pl/ sem/konferencja-kmp2008/ ?strona=teksty/materialy.php`
- `http://www.mimuw.edu.pl/ sem/konferencja-2009/ ?strona=teksty/materialy.php`

W roku 2008 tematem konferencji były *Konkursy matematyczne w Polsce.* Poruszono na niej tematy bardziej ogólne, o których mówili: prof. Michał Szurek – *Przestrzeń zadaniowa*, prof. Marek Kordos –*Struktura przestrzeni zadań*, poprzez *Konkursy popularyzujące matematykę* – Małgorzaty Mikołajczyk, aż po typowe, które można wykorzystać na zajęciach koła matematycznego.

Druga konferencja – *Matematyka. Jak uczyć?* – odbyła w roku 2009. Tak jak po poprzedniej, także po tej konferencji większość z materiałów to takie, które można wykorzystać w pracy z uczniem zdolnym na zajęciach koła matematycznego.

2.2. Książki



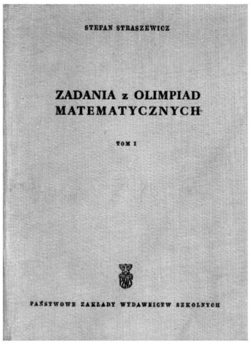
Rozpocznę od pozycji skierowanej do najmłodszych: *Matematyczne gwiazdki* – książka adresowana do uczniów klas IV-VI szkoły podstawowej. Ale – proszę mi wierzyć – śmiało można ją wykorzystać również w gimnazjum, a niejednemu początkującemu licealiście też wiele zadań sprawiłoby kłopot.

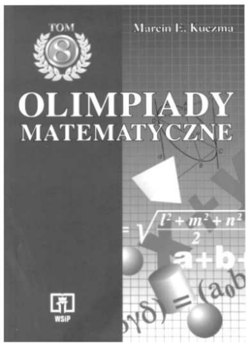
W ubiegłym miesiącu zakończyła się V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów. Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej we współpracy z Wydawnictwem Szkolnym OMEGA z Krakowa wydaje sprawozdania z tych olimpiad. Ukazały się w tej chwili dwa – pierwszej i drugiej OMG, w których oprócz typowej części sprawozdawczej zawierającej listę finalistów, listę nagrodzonych i miejsca rozgrywania zawodów, znajdują się też wszystkie zadania wraz z rozwiązaniami danej edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów – niektóre rozwiązane wieloma sposobami. W każdym takim wydawnictwie znajdują się również dodatki tematyczne.

W broszurze poświęconej I OMG znajduje się dodatek *Kongruencje*, który napisali Jacek Dymel i Michał Niedźwiedź oraz dodatek *Zasada szufladkowa Dirichleta*, który napisała Joanna Jaszuńska.

W broszurze poświęconej II OMG znajdują się też dwa dodatki: *Twierdzenia Carnota*, który napisali Wojciech Guzicki i Waldemar Pompe oraz *Nierówność Schwarza*, który napisałem ja. Broszura dotycząca III OMG jest w przygotowaniu.

Wiadomo również wszystkim, że takie broszury wydawane są od I Olimpiady Matematycznej. Oprócz rozwiązań wszystkich zadań zawodów ogólnopolskich znajdują się w nich również zadania i ich rozwiązania z zawodów międzynarodowych. Także w niektórych broszurach OM znajdują się dodatki tematyczne przydatne do pracy z uczniem zdolnym. Przedstawiona przeze mnie tu broszura dotyczy LVII OM. Olimpiada Matematyczna stworzyła pewien wzór takiej broszury i Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów w pewnym sensie powiela go.



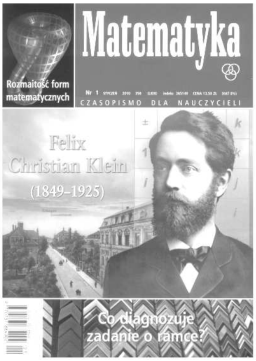


Wydawane też były książki z zadaniami olimpiad matematycznych. Tu przedstawiam tom I napisany przez prof. Stefana Straszewicza, w tej chwili, poza niektórymi bibliotekami, praktycznie niedostępny oraz tom VIII napisany przez dra Marcina Kuczmę, który ukazał się jako ostatni w tej serii. W każdym takim tomie znajdują się zadania z pięciu kolejnych olimpiad oraz z zawodów międzynarodowych, które w tym czasie się odbywały.

Na koniec warto wspomnieć o książkach Lva Kurlyandchika i Henryka Pawłowskiego, które są chyba powszechnie znane i wykorzystywane.

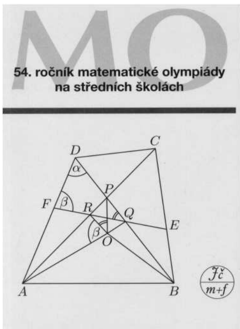
2.3. Czasopisma

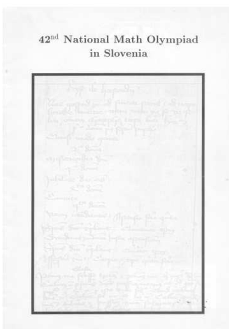
Rozpoczniemy od miesięcznika *Matematyka*. Myślę, że to czasopismo zna każdy nauczyciel. Niemal w każdym numerze można znaleźć materiały do pracy z uczniem. Jednak w ostatnim czasie brakuje mi materiałów do pracy z uczniem uzdolnionym. Jest ich teraz w tym czasopiśmie mniej, niż było przed laty. Wtedy był stały kącik *Zadania dla kółek matematycznych*. Być może obecnie redakcja chce poświęcić więcej miejsca materiałom przeznaczonym do pracy z uczniem przeciętnym.

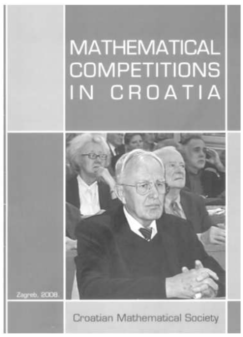


Czasopismo *Delta*, które też chyba wszyscy znają, to również jest świetny materiał do pracy z uczniem zdolnym. Oprócz artykułów jest tam bardzo dużo zadań. Jest *Kącik zadaniowy*, jest *Liga 44*. Są to zadania, które można wykorzystać w pracy koła matematycznego.

Odpowiednikiem *Delty*, choć nie do końca, jest rosyjskie czasopismo *Kwant*, które wydawane jest od początku 1970 roku. To kopalnia zadań, które można wykorzystywać na kółku matematycznym. Czasopismo *Kwant*, co później Państwo zobaczą, ma również swoją stronę internetową. Wszystkie numery, z około półrocznym opóźnieniem, znajdują się na tej stronie. Pierwsze numery są zeskanowane i zamieszczone w plikach graficznych. Ostatnie numery to już są pliki PDF, praktycznie gotowe do druku.

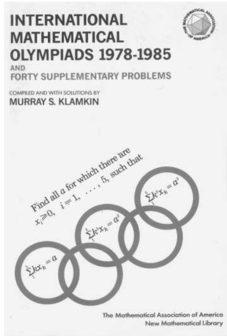


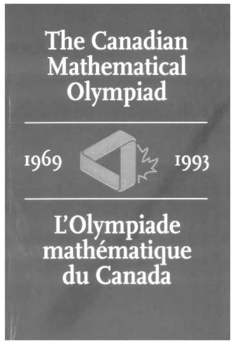




Czasem przydatne w pracy materiały otrzymuję od kolegów z innych krajów. Tutaj chciałem pokazać sprawozdania z olimpiad: czeskiej, słowackiej, słoweńskiej i chorwackiej jakie otrzymałem podczas zawodów II Olimpiady Matematycznej Europy Środkowej.

Jako ciekawostkę podam, że Czesi i Słowacy do dziś mają na swoich olimpiadach wspólne zadania. Z oczywistych powodów zawody w Czechach i na Słowacji odbywają się w tym samym dniu. Wspólnie też prowadzą oni obóz naukowy przed zawodami międzynarodowymi.





Teraz chciałbym Państwu pokazać książki z olimpiad matematycznych wydane w USA i Kanadzie. Są one w naszym kraju praktycznie niedostępne. Te, które państwu prezentuję, otrzymałem od swoich byłych uczniów – olimpijczyków, którzy mi je stamtąd przywieźli.

Dzięki życzliwości kolegów (w tym przypadku obecnego na sali Lecha Kaźmierczyka z Warszawy) mogę otrzymać również książki z Rosji. Książka z lewej strony to zbiór olimpijskich zadań z matematyki. Zawiera materiał nie tylko olimpiad rosyjskich. Są w niej zadania olimpiad z wielu krajów, m.in. również Polski. Całość pogrupowana jest tematycznie, nie ma tam natomiast w ogóle geometrii. Książka z prawej strony to sprawozdanie z Petersburskich Olimpiad Matematycznych. Sprawozdania takie wydawane co roku oraz zbiorczo co kilka lat.

2.4. Internet

Internet to ogromna baza zadań i nie tylko zadań. Chciałbym zaprezentować Państwu kilka stron, na których można znaleźć wiele materiałów przydatnych do pracy z uczniem zdolnym.

Pierwsza strona to Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów [`www.omg.edu.pl`]. Na niej znajdują się zadania ze wszystkich edycji Olimpiady. Zamieszczone tam zadania to po prostu gotowy materiał na kółko.

Olimpiada Matematyczna [www.om.edu.pl] – to ogromna baza, ponieważ od LXVI OM są tutaj zamieszczone wszystkie zadania. Znajdują się tu również zadania z różnych zawodów międzynarodowych i obozu w Zwardoniu.

We Wrocławiu prowadzona jest Liga Naukowa [www.liganaukowa.pl] – matematyczna i humanistyczna. Na stronie internetowej Ligi znajdują się zadania ze wszystkich edycji – to znowu gotowy materiał na kółko. Ale ta liga jest adresowana wyłącznie do gimnazjalistów.

Teraz chciałem pokazać stronę Wrocławskiego Portalu Matematycznego, który – moim zdaniem – jest jednym z lepszych [www.matematyka.wroc.pl]. Uważam, że jest on naprawdę świetnie zrobiony. Dostępnych jest wiele materiałów, artykułów, zadań i informacji o wszelkiego rodzaju konkursach. Wszystko znajduje się w jednym miejscu.

Przejdźmy teraz do stron zagranicznych. Dla mnie bardzo przydatna jest strona dotycząca konkursów i olimpiad w Okręgu Moskiewskim [www.mccme.ru]. Są tam również odnośniki, m.in. do czasopisma *Kwant* czy Biblioteki Internetowej.

Biblioteka Internetowa [www.mccme.ru/free-books/] to ogromny zbiór książek. Najstarsze pochodzą z roku 1902, a niektóre z roku 2010. Wszystkie są dostępne. Należy jednak zwrócić uwagę na copyright. Twórcy tej strony wyróżniają ich cztery rodzaje – od C0 do C3:

- C0 – można rozpowszechniać bez żadnych ograniczeń,
- C1 – można rozpowszechniać bez ograniczeń (w formie elektronicznej lub drukowanej), ale bez wprowadzania zmian i zachowaniem warunków copyright,
- C2 – można wykorzystywać w celach niekomercyjnych; w przypadku wykorzystania komercyjnego należy uzyskać specjalne pozwolenie,
- C3 – można przeglądać na ekranie monitora, ale nie wolno drukować, choć opcja drukowania nie jest wyłączona.

Część książek – zwłaszcza bardzo starych – dostępna jest w mniej popularnym formacie DJVU, a najnowsze to po prostu pliki PDF gotowe do druku.

Tak jak powiedziałem wcześniej, wykorzystuję w pracy również czasopismo *Kwant* [kvant.mirror1.mccme.ru]. Jak na obecne czasy, jest to strona trochę siermiężna, ale jest bardzo funkcjonalna. Już na głównej stronie jest dostęp do wszystkich numerów tego czasopisma, które ukazały się do końca 2009 r. Początkowo *Kwant* był miesięcznikiem. W tej chwili jest dwumiesięcznikiem. Ciekawym rozwiązaniem na tej stronie są linki do wybranych artykułów.

Czasopismo *Crux Mathematicorum* [`www.math.ca/crux/`] Kanadyjskiego Towarzystwa Matematycznego też jest zapewne wielu z Państwa znane. Tu rozwiązanie jest nieco inne. Przez pierwszych pięć lat czasopismo jest dostępne wyłącznie odpłatnie. Natomiast po pięciu latach jest dostępne bezpłatnie. Wszystkie informacje można znaleźć na stronie tego czasopisma.

Jeżeli chodzi o stronę typu forum, to chyba najlepszym jest forum rumuńskie *MathLinks* [`www.artofproblemsolving.com/index.php`], gdzie można znaleźć bardzo wiele zadań, również z naszej polskiej olimpiady matematycznej oraz olimpiad z innych krajów.

Odpowiednikiem tego jest forum polskie: [`matematyka.pl`]. To forum z bardzo odpowiedzialnymi moderatorami, którzy nie pozwalają na dyskusję o zadaniach z konkursów, które w tym czasie trwają. Natomiast po ich zakończeniu dopuszczają szeroką dyskusję. Wtedy też pojawia się wiele różnych rozwiązań zadań z tych konkursów.

Teraz pokażę stronę portalu, przed którym należy uczniów chronić. Jest to portal [`zadane.pl`]. Prowadzący stronę wręcz zachwalają – napisz treść zadania, a my ci napiszemy rozwiązanie. Uczniowie mogą tam przesyłać treść zadania nie tylko z matematyki, języka polskiego czy historii. Jednak przedstawiane tam rozwiązania zadań z matematyki są bardzo często błędne. Chyba należy piętnować tego typu przedsięwzięcia.

Na zakończenie chciałbym powiedzieć kilka słów na temat projektu realizowanego przeze mnie. Po konferencji w Sulejowie zorganizowałem w Bielsku-Białej grupę nauczycieli, z którymi prowadzimy wspólne zajęcia. Polegają one na przygotowywaniu różnych zestawów zadań na kółko matematyczne. Grupa nauczycieli została rozszerzona później o grupę uczniów mojego liceum. Wspólnie prowadziliśmy zajęcia i powstał z tego mały zbiór zadań. Mam nadzieję, że praca tej grupy będzie kontynuowana i ukażą się kolejne tomiki.

DYSKUSJA

Doktor Zbigniew Powązka (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie) – Chciałbym uzupełnić informację Kolegi, który mówił tu o wykładach dla młodzieży, dla uczniów uzdolnionych. Otóż, od ponad sześciu lat Pani doktor Joanna Major, Koleżanka z Instytutu, obecnie przewodnicząca Komisji Popularyzacji Matematyki w Oddziale Krakowskim PTM, organizuje w naszej Uczelni comiesięczne wykłady dla uczniów zdolnych, dla licealistów, dla młodzieży gimnazjalnej właśnie dotyczące różnych takich interesujących tematów związanych z matematyką wyższą i – powiedzmy – popularną też. Czwartki uniwersyteckie, o których Kolega wspominał, są jakby wtórną rzeczą. One od zeszłego roku pojawiły się u nas w Krakowie. Witamy je oczywiście bardzo serdecznie, a myślę, że będę wyrazicielem woli również Koleżanki (nie uzgadniałem z Nią tego), że będę mógł zaprosić na te nasze czwartki, też czwartki, ale po południu, tym razem w naszym Instytucie. One na naszej stronie internetowej są ogłaszane i myślę, że dalej będą się rozwijać. Dziękuję.

Doktor hab. Krzysztof Ciesielski – W kwestii formalnej. Nie chciałbym przedłużać, ale skoro o tym mowa, to jednak trzeba jedną rzecz sprostować, jeśli chodzi o te wykłady organizowane obecnie przez Panią Major. To nie są wykłady związane z konkretną uczelnią i to nie jest organizowane od sześciu lat, ale znacznie dłużej, chyba od prawie 30 lat. To są PTM-owskie wykłady popularne o matematyce i po prostu Pani Major w tej chwili jest przewodniczącą odpowiedniej Komisji przy Oddziale Krakowskim Polskiego Towarzystwa Matematycznego; ona po prostu tę pracę przejęła po poprzednich przewodniczących, których była cała seria – był Pan Pogoda, był Pan Chmieliński, Pan Dawidowicz, Pan Szczepański, byłem ja, Pan Tutaj... Zaraz, powiedziałem prawie 30 lat? Znacznie dłużej! Przecież chodziłem na te wykłady jako uczeń, w latach siedemdziesiątych, mieli je wtedy między innymi Profesor Gołąb, Profesor Krygowska, to trwa od grubo ponad 30 lat, można powiedzieć, że jest to po prostu kontynuacja od minus nieskończoności. Absolutnie nie sześć lat, i absolutnie nie jedna uczelnia, czy to Uniwersytet Pedagogiczny, czy Jagielloński, to są wykłady Polskiego Towarzystwa Matematycznego organizowane przy współpracy Pałacu Młodzieży imienia Jordana. Związek z uczelnią polega na miejscu, gdzie to się akurat odbywa. To bardzo miłe, że te wykłady i „matematyczne czwartki" na UJ zostały tu wspomniane, ale to jest jednak trochę inny temat, bo zarówno te wykłady, jak i „czwartki" nie są kierowane dla młodzieży uzdolnionej, to jest po prostu upowszechnianie matematyki skierowane do wszystkich uczniów, dla każdego ucznia zainteresowanego matematyką, to jest więc troszeczkę inna bajka.

Pani Aleksandra Kowalik (Ministerstwo Edukacji Narodowej) – Jeśli Państwo pozwolą, chciałabym przekazać krótką informację na temat prac prowadzonych w Ministerstwie Edukacji Narodowej w zakresie przygotowania konkursu na organizację i przeprowadzenie olimpiad. Mamy niestety w tym zakresie opóźnienie, gdyż uzgodnienia zmian trwały dłużej niż szacowaliśmy. Spodziewam się, że konkurs zostanie ogłoszony na początku maja. Konkurs ten będzie dotyczył organizacji olimpiad w kolejnych trzech latach szkolnych, dzięki czemu ciągłość olimpiad będzie zachowana, co dla Państwa na pewno jest bardzo istotne. Jednocześnie chciałam uprzedzić, że Olimpiada Matematyczna dla Gimnazjalistów oraz Olimpiada Informatyczna dla Gimnazjalistów będą realizowane w ramach osobnego konkursu współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej, w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego w projekcie realizowanym przez Ministerstwo pt. *Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym.* W ramach projektu planujemy przeprowadzenie badań m.in. dotyczących olimpiad, choć bardziej pod kątem socjologicznym, jakości, organizacji, niż analizy merytorycznej zadań. Należy jednak dodać, że w ramach projektu będziemy, współpracując z ekspertami, zmieniać prawo dotyczące organizacji olimpiad, konkursów i turniejów.

Mam nadzieję, że część z Państwa będzie aktywnie brać udział, na różnych etapach projektu, w naszych pracach. Podsumowując, chciałabym podkreślić, że Ministerstwo Edukacji Narodowej zajęło się w projekcie systemowym szczególnymi potrzebami uczniów zdolnych, wychodząc z założenia, że niezbędna jest walka z mitem, że uczeń zdolny sam sobie poradzi.

O NAUCZANIU MATEMATYKI W WYBRANYCH PAŃSTWACH EUROPEJSKICH

Tadeusz Koźniewski

Uniwersytet Warszawski
e-mail: t.kozniewski@mimuw.edu.pl

Celem badań, które tu opiszę było zebranie informacji na temat nauczania matematyki w krajach Unii Europejskiej. Chodziło nam o to, aby uzyskane informacje mogły posłużyć jako wskazówki do podniesienia jakości nauczania matematyki w Polsce. Chciałbym przy tym podkreślić, że nie podchodziliśmy do tego projektu z założeniem, że wszystkie doświadczenia zagraniczne okażą się lepsze niż polskie i automatycznie wytyczą drogę do zmian naszych metod i treści nauczania. To, które z zebranych przez nas rozwiązań zasługują na próbę wdrożenia w Polsce, powinno być przedmiotem dalszej refleksji. Sądzę przy tym, że niektóre z uzyskanych danych mogą się wydać dość zaskakujące.

Odczyt ten oparty jest na trzech opracowaniach: Jolanty Chełmińskiej i Krzysztofa Chełmińskiego *O nauczaniu matematyki w Badenii-Wirtembergii*, Wojciecha Guzickiego *Matematyka w szkołach we Francji* oraz Lecha Kaźmierczaka *O nauczaniu matematyki w Austrii*. Omówię wybrane wątki z tych prac. Wymienione artykuły zawierają szeroki i różnorodny materiał. Zaprezentuję tu jedynie wybrane zagadnienia.

Zacznijmy od metodologii badań. Przed rozpoczęciem prac polegających na zbieraniu danych, musieliśmy podjąć decyzję o sposobie organizowania i systematyzowania informacji na temat systemów i metod nauczania matematyki za granicą. W tym celu przygotowaliśmy wstępną listę pytań badawczych. Następnie zweryfikowaliśmy tę listę na podstawie cząstkowych analiz dostępnego materiału. W efekcie uzyskaliśmy zestaw podstawowych pytań, na które chcieliśmy uzyskać odpowiedź. W tym wystąpieniu skoncentruję się na tych pytaniach, które wydawały nam się najważniejsze.

Pierwsze z nich dotyczy struktury systemu edukacyjnego obowiązującego w danym kraju. Jakie są rodzaje szkół, jaki procent młodzieży i w jakich przedziałach wiekowych do nich uczęszcza, jakie są możliwości przechodzenia od jednego typu szkoły do drugiego? Pytania te dotyczą oczywiście nie tylko nauczania matematyki, ale całego systemu szkolnego, niemniej są tu niezbędne. Bez tego rodzaju informacji trudno jest porównywać szkoły i sposoby uczenia.

Drugi temat, dotyczący szkolnictwa za granicą, który wydał nam się ważny, być może najważniejszy, to uzyskanie zestawu informacji o programach, o tym czego, kiedy i jak uczniowie się tam uczą. Sądziliśmy, że powinno to być opisane w podstawach programowych i standardach wymagań. To znaczy, że w każdym z badanych krajów powinny być – podobnie jak w Polsce – dokumenty, które to określają. I rzeczywiście autorom prac udało się do tych dokumentów dotrzeć. Dokumenty te są w ich pracach omówione, przy czym w każdym kraju zagadnienia te przedstawiane są w nieco innej formie. To co zaskoczyło nas w trakcie tych badań, to fakt, że dokumenty te w gruncie rzeczy nie niosą aż tak wiele informacji, których oczekiwaliśmy. Bierze się to stąd, że są one formułowane w sposób dosyć ogólnikowy i żeby wiedzieć, co stoi za hasłami, które są tam wymienione, trzeba byłoby zobaczyć, co naprawdę jest realizowane w szkole. To znaczy, jakie zadania są rozwiązywane na zajęciach i jakiego typu umiejętności rozwiązywania zadań oczekuje się od uczniów.

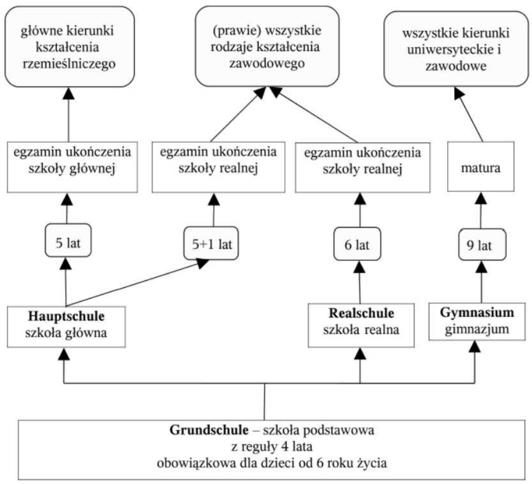
W ten sposób przechodzimy do trzeciego tematu, jaki chcieliśmy badać. Myśleliśmy nie tyle o zbieraniu zadań ze szkół, z poszczególnych klas, bo to byłoby bardzo trudne do reprezentatywnego wyboru i usystematyzowania, ale o zadaniach egzaminacyjnych, przede wszystkim z tych egzaminów, które są szkołom narzucone z zewnątrz i które są potem upublicznione. Wszystkim autorom prac udało się takie zadania z egzaminów zebrać i to w dosyć dużej liczbie. Jest to, moim zdaniem, absolutnie kluczowa uzyskana informacja. Jak się porówna, czego się na tych egzaminach wymaga, to rzuca to światło na to, czego się uczy. Prezentacja wybranych zadań będzie stanowiła główną część mojego odczytu. Przedstawię oczywiście zarys informacji o systemach nauczania, w tym o liczebności uczniów przypisanych różnym typom szkół, bo jest to informacja niezbędna. Skoncentruję się jednak na tym, co – jak sądzę – jest dla matematyków najciekawsze. A zatem przyjrzyjmy się zadaniom. Po prostu zobaczmy, co oni tam rozwiązują za granicą.

I czwarty temat, który uznaliśmy za bardzo ważny, to próba podsumowania uzyskanych danych i porównania ich z systemem nauczania matematyki w Polsce. W omawianych pracach pewne wnioski na ten temat zostały wyciągnięte. Na podstawie zebranego materiału można na pewno tę analizę pogłębić.

Mogłaby też być ona rozszerzona, gdyby uwzględnić inne kraje, które nie weszły do naszego badania. Nie weszły z wielu względów. Nie jest bowiem trudno poprosić kogoś, kto zna, na przykład, język włoski, żeby przeczytał i przetłumaczył to, co w Internecie znajduje się na temat włoskiego systemu oświaty. Trudniej jest namówić matematyka ze znajomością języka włoskiego, żeby takie materiały przetłumaczył i sensownie opracował. A najtrudniej jest znaleźć matematyka, który miałby za sobą doświadczenie pobytu we Włoszech, wiedziałby, co naprawdę znaczą tamtejsze dane o systemie oraz hasła programowe i który chciałby się podjąć zadania opracowania tych informacji. Wymieniłem tu Włochy, dla przykładu, ale może pozwolę sobie na drobną dygresję. Otóż, znanym problemem jest zmniejszające się z każdym rokiem w wielu krajach Zachodniej Europy zainteresowanie studiami matematycznymi. Jest bardzo wyraźna tendencja, występująca w przeważającej liczbie krajów Zachodniej Europy od dłuższego czasu. Zjawisko to jest przedmiotem wielu analiz. Jest rzeczą interesującą, że jest jeden kraj w Europie, który w ubiegłym dziesięcioleciu zdołał skutecznie zmierzyć się z tym problemem. Tym krajem są Włochy. Stworzono tam program, który łączy działania szkół, władz oświatowych i wyższych uczelni nakierowany na zwiększenie zainteresowania młodzieży studiowaniem matematyki. Rezultaty są zadziwiająco dobre. Włochom udało się w dużym stopniu odbudować zainteresowanie matematyką do poziomu, jaki rejestrowano przed rozpoczęciem tego trendu spadkowego.

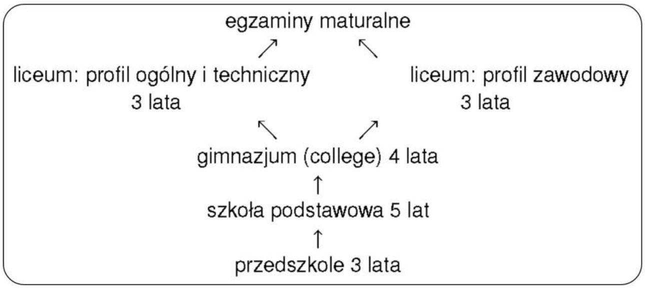
Są jeszcze inne pytania, na które próbowaliśmy znaleźć odpowiedzi i które zostały przynajmniej częściowo poddane analizie w omawianych pracach. Na przykład chcieliśmy wiedzieć, jak duże są różnice między poziomami wymagań z matematyki w różnych rodzajach szkół. Chcieliśmy też zrobić coś, czego nam się nie udało zrealizować, mianowicie zaproponować pewną listę pojęć matematycznych i śledzić, w którym momencie przebiegu edukacji w danym systemie szkolnym to pojęcie się pojawia i kiedy zaczyna się rozwiązywać zadania na jego temat. Podobnie chcieliśmy badać, jakie są metody postępowania z uczniem specjalnie uzdolnionym matematycznie, czy są wypracowane sposoby działania, specyficzne dla danego kraju. To wszystko są tematy, do których, naszym zdaniem, warto wrócić w dalszych badaniach.

Przejdę teraz do przeglądu odpowiedzi na postawione wyżej pytania. Zacznę od pracy Chełmińskich. Na rysunku 1 przedstawiony jest uproszczony schemat systemu kształcenia w Niemczech, który obowiązuje w szczególności w Badenii-Wirtembergii. Cechą systemu niemieckiego i również austriackiego, o którym będzie jeszcze mowa, jest to, że już po czterech latach szkoły podstawowej następuje specjalizacja, podział na trzy typy szkół: szkoła główna – *Hauptschule*, szkoła realna – *Realschule* i gimnazjum – *Gymnasium*. Hauptschule jest najłatwiejsza, Realschule stawia przed uczniami wyższe wymagania, a najtrudniejsze, najambitniejsze jest Gymnasium. Każda z tych szkół, po odpowiedniej liczbie lat – w przypadku szkoły głównej pięciu, w przypadku szkoły realnej sześciu, w przypadku gimnazjum dziewięciu lat – kończy się egzaminem. Zdanie takiego egzaminu końcowego daje prawo do dalszego kształcenia, w tym do studiów wyższych, w zależności od typu ukończonej szkoły. W pracy Chełmińskich są podane przykłady kompletnych egzaminów z matematyki w każdym z tych typów szkół. Ważnym dopełnieniem powyższego schematu jest informacja o tym, jaki jest udział młodzieży w każdym z wymienionych typów szkół. Szkołę główną rozpoczyna 27,7% uczniów, szkołę realną – 32,9%, a gimnazjum, tę najtrudniejszą szkołę – 38,2%. Nie znaczy to, że 38,2% rocznika kończy gimnazjum. Jest tam spory odsiew. W gimnazjum nie ma rozdziału na klasy łatwiejsze czy trudniejsze. Jest obowiązkowa matura, dla wszystkich wspólna. Maturę tę pisze między 20% a 25% rocznika.



Rys. 1. Uproszczony schemat systemu kształcenia w Niemczech

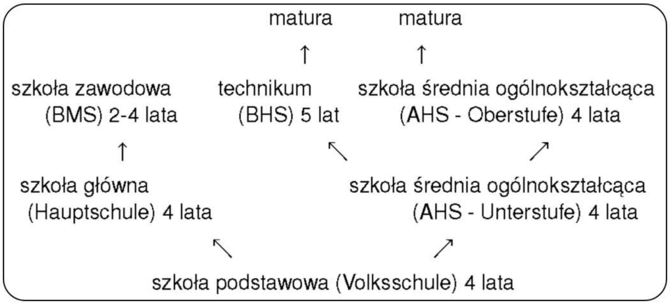
Przejdę teraz do systemu francuskiego (rys. 2). We wszystkich omawianych systemach, zarówno Austrii jak i we Francji, jak i w Niemczech, szkołę podstawową zaczyna się od 6 roku życia. Zatem trzyletnie przedszkole wymienione na rysunku 2 obejmuje lata od 3 do 6 roku życia. W systemie francuskim szkoła podstawowa jest pięcioletnia. Potem jest czteroletnie gimnazjum (*college*), a następnie dwa rodzaje trzyletniego liceum: liceum o profilu ogólnym i technicznym (to jest szkoła trudniejsza i bardziej wymagająca) i liceum o profilu zawodowym. Oba profile liceów kończą się egzaminami maturalnymi, oczywiście różnymi. Również w ramach liceum profilu ogólnego i technicznego jest wiele różnych matur. To nie jest tak, jak w Niemczech, że po gimnazjum, czyli szkole o najwyższym poziomie, jest jeden wspólny egzamin. W tym miejscu chciałbym wspomnieć o jeszcze jednym temacie, który warto badać. Jest to liczba godzin przeznaczonych na matematykę w poszczególnych typach szkół. Bez wchodzenia w szczegóły można powiedzieć, że zarówno we Francji, jak i w Niemczech, jak i w Austrii w szkole ponadpodstawowej o najwyższym poziomie trudności mówimy zazwyczaj o czterech, a może nawet czasami pięciu godzinach matematyki w tygodniu. Procentowy udział uczniów w dwóch profilach liceum we Francji jest taki, że w profilu ogólnym i technicznym jest 2/3 uczniów, a w profilu zawodowym 1/3, więc wygląda to trochę inaczej niż w Niemczech. Tutaj wyraźnie – przynajmniej w teorii – te szkoły trudniejsze mają liczebną przewagę. Oczywiście, ich poziom musi być zróżnicowany, bo z pewnością są dopasowane do realnych możliwości uczniów.



Rys. 2. Uproszczony schemat systemu kształcenia we Francji

Na koniec system austriacki (rys. 3). Jest on bardzo zbliżony do systemu niemieckiego. Szkoła podstawowa trwa w Austrii 4 lata. Potem podejmowana jest główna decyzja edukacyjna dotycząca uczniów: albo szkoła główna, albo ogólnokształcąca szkoła średnia. Ogólnokształcąca szkoła średnia po czterech latach dzieli się na technikum lub szkołę ogólnokształcącą. Zarówno technikum, jak i szkoła ogólnokształcąca kończą się maturą. Szkoła zawodowa kończy się oddzielnym egzaminem.

Tak przedstawia się ogólny zarys systemów edukacji w omawianych krajach. Przejdę teraz do omówienia przykładów zadań egzaminacyjnych. Referowane tu prace zawierają wiele różnych zestawów zadań i dają możliwość przeprowadzenia wielu interesujących analiz. Byłoby na przykład ciekawe porównanie przytoczonego w pracy Chełmińskich egzaminu końcowego niemieckiej szkoły głównej z polskim egzaminem po gimnazjum. Szkoła główna, łącznie ze szkołą podstawową trwa 9 lat, więc jej egzamin końcowy, to jakby odpowiednik naszego egzaminu po gimnazjum. Przytoczone przez Chełmińskich



Rys. 3. Uproszczony schemat systemu kształcenia w Austrii

zadania istotnie różnią się zarówno skalą trudności, jak i sformułowaniem od tych, które występują na polskim egzaminie gimnazjalnym. Myślę, że porównanie przyniosłoby tu ciekawe rezultaty.

Omówię jednak zadania egzaminacyjne z najwyższego poziomu, to znaczy z poziomu gimnazjum w Niemczech i liceum o profilu ogólnym we Francji. Zacznijmy od Niemiec, a dokładnie od Badenii-Wirtembergii. Omawiany zestaw to matura w gimnazjum z roku 2008, pisana – jak wcześniej wspomniałem – przez około 25% rocznika. Czas pracy wynosił 4 godziny, dopuszczone były proste kalkulatory. Zadania podzielono na dwie grupy: część obowiązkową i część do wyboru. Uczniowie mieli do rozwiązania wszystkie zadania z części obowiązkowej i po jednym zadaniu z analizy i z geometrii z części do wyboru. Wybór zadań z listy zadań do wyboru należał do nauczyciela. Za część obowiązkową można było uzyskać maksymalnie 26 punktów (rys. 4), przy każdym zadaniu napisane jest, ile punktów można otrzymać za jego rozwiązanie. Pierwsze zadanie – oblicz pochodną funkcji, przedstaw ją w możliwie najprostszej postaci. Drugie – scałkuj, znajdź funkcję pierwotną. W zadaniu trzecim trzeba rozwiązać równanie. I w czwartym znaleźć wzór na funkcję kwadratową o podanych własnościach. Następnie są trzy zadania z geometrii. W zadaniu piątym dane są dwie proste równoległe, zadane parametryzacjami. Polecenie dotyczy obliczenia odległości między tymi prostymi. I jeszcze jedno zadanie z algebry liniowej, właściwie z geometrii afinicznej – zadanie szóste. Płaszczyzna przechodzi przez podane trzy punkty. Należy sprawdzić, czy prosta o zadanej parametryzacji jest równoległa do tej płaszczyzny. I trzecie zadanie geometryczne, zadanie numer 7, o charakterze nieco bardziej teoretycznym. W zadaniu tym dwie płaszczyzny dane są równaniami, czyli podane są ich wektory prostopadłe $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ oraz podane są punkty, odpowiednio, $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$, przez które te płaszczyzny przechodzą. Należy opisać, w jaki sposób zbadać wzajemne położenie tych płaszczyzn, posługując się zadanymi równaniami. W zadaniu

Część obowiązkowa. Maksymalnie 26 punktów

1. (2 pkt) Funkcja f określona jest wzorem $\frac{2x^2}{2x^2-3}$.
Oblicz pochodną funkcji f i przedstaw ją w możliwie najprostszej postaci.

2. (2 pkt) Funkcja G jest funkcją pierwotną funkcji $g(x) = 2 - 3sin(4x)$.
Punkt $P = (0, 1)$ należy do wykresu funkcji G. Wyznacz wzór funkcji G.

3. (3 pkt) Rozwiąż równanie $\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1$, $(x \neq 0)$.

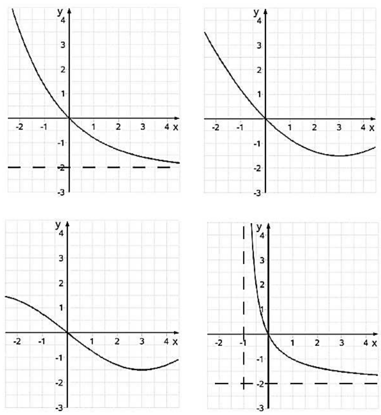
4. (4pt) O wielomianie h drugiego stopnia wiadomo, że dla argumentu -1 przyjmuje wartość najmniejszą równą -4 i punkt $Q = (2, 5)$ należy do wykresu h. Wyznacz wielomian h.

5. (4 pkt) Dane są dwie proste równoległe g oraz h zadane przez:
$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}; \; s, t \in R$$
Oblicz odległość pomiędzy tymi prostymi.

6. (3 pkt) Płaszczyzna E przechodzi przez
$A = (1.5, 0, 0), B = (0, 3, 0), C = (0, 0, 6)$. Sprawdź, czy prosta
$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \; t \in R$$ jest równoległa do płaszczyzny E.

7. (3 pkt) Dane są dwie płaszczyzny $E_1 : (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p_1}) \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$ i $E_2 : (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p_2}) \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$. Opisz jak posługując się zadanymi równaniami płaszczyzn zbadać ich wzajemne położenie.

8. (5 pkt) Dane są fragmenty wykresów czterech funkcji wraz z asymptotami, jeżeli je posiadają



Trzy spośród podanych wykresów są wykresami funkcji f, g, i h.
$f(x) = \frac{-2x}{x+a}$, $g(x) = -2 + b \cdot e^{-0,5x}$, $h(x) = c \cdot x^2 - x$.

1. Przyporządkuj funkcjom f, g oraz h ich wykresy. Uzasadnij swój wybór.
2. Oblicz wartości a i b.

Rys. 4. Przykładowe zadania egzaminacyjne. Część obowiązkowa ósmym podane są cztery wykresy funkcji. Pierwszy to wykres z jedną asymptotą, drugi wygląda jak część paraboli, trzeci jest fragmentem wykresu funkcji z punktem przegięcia i czwarty to wykres funkcji z dwoma asymptotami. Dane są też trzy funkcje, jedna $-2x/(x+a)$, druga $-2+be^{-0,5x}$ i trzecia cx^2-x. Powiedziane jest, że trzy z powyższych wykresów to wykresy wymienionych funkcji. Trzeba zatem tym funkcjom przyporządkować ich wykresy, a następnie, korzystając z danych na wykresach, obliczyć wartości stałych a i b.

Przejdziemy teraz do zadań do wyboru. Zaczniemy od zadania z analizy. Można było za nie uzyskać maksymalnie 18 punktów. Zaprezentuję trzy zadania, czyli komplet wszystkich zadań do wyboru, które były dostępne na tym egzaminie. Pierwsze zadanie sformułowane jest następująco. Górska dolina jest ograniczona od zachodu stromą ścianą skalną, a od wschodu łagodnym wzgórzem i jej przekrój jest opisany wykresem funkcji, która jest podana (rys. 5). Jest to wielomian trzeciego stopnia określony na przedziale od $-2,5$ do 5, przy

1.1 Górska dolina jest ograniczona od zachodu stromą ścianą skalną, a od wschodu łagodnym wzgórzem. Przekrój poprzeczny terenu jest opisany wykresem funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125; \quad -2,5 \le x \le 5$$

przy czym dodatni kierunek osi jest skierowany na wschód (1 jednostka długości odpowiada 100 m).

a) (8 pkt) Naszkicuj przekrój poprzeczny terenu. Na wschodniej ścianie doliny znajdź najbardziej strome miejsce. Następnie na zachodniej ścianie doliny znajdź miejsce o takim samym nachyleniu. W poprzek doliny w kierunku zachodnio - wschodnim znajduje się tama. Z najgłębszego miejsca doliny do brzegu tamy jest 312,5 m. Oblicz szerokość tamy oraz pole powierzchni jej przekroju.

b) (6 pkt) Na dnie doliny znajduje się wieś, która już po południu leży w cieniu. Przekrój poprzeczny terenu jest opisany za pomocą wykresu funkcji f. Na wzór włoskiej miejscowości Viganella w najwyższym punkcie wschodniego wzgórza ma zostać zbudowany maszt z obracanym lustrem do odbijania światła słonecznego. Wyznacz najmniejszą wysokość masztu, przy której światło słoneczne może osiągnąć najgłębszy punkt przekroju doliny. Jak wysoki musi być maszt, aby cały teren wioski mógłby być oświetlony?

1.2 (4pkt) Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \frac{1}{1-2x}$; $x \neq 0,5$.
Wykaż za pomocą indukcji zupełnej, że n-ta pochodna funkcji g określona jest wzorem $g^{(n)}(x) = n!\frac{2^n}{(1-2x)^{n+1}}$ dla wszystkich $n \ge 1$, gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ dla $n \ge 1$.

Rys. 5. Przykładowe zadanie z części do wyboru. Analiza

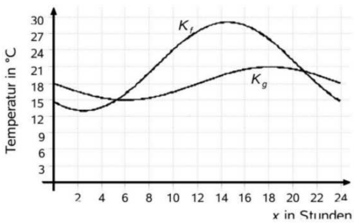
czym dodatni kierunek osi skierowany jest na wschód, a jedna jednostka odpowiada 100 metrom. Zatem przedział od $-2,5$ do 5 odpowiada 750 metrom. Pierwsze polecenie brzmi – naszkicuj przekrój poprzeczny terenu. Następnie, na wschodniej ścianie znajdź najbardziej strome miejsce. Potem na zachodniej ścianie znajdź miejsce o takim samym nachyleniu. W poprzek doliny, w kierunku zachodnio-wschodnim znajduje się tama, która ma w najwyższym punkcie głębokość 312,5 metra. Trzeba obliczyć szerokość tamy oraz pole powierzchni jej przekroju. Przyjrzyjmy się, jakich umiejętności wymaga od ucznia rozwiązanie tego fragmentu zadania. Szkicowanie przekroju doliny, to badanie przebiegu funkcji f za pomocą policzenia pochodnej. Pochodna użyta jest też przy znajdowaniu najbardziej stromego miejsca na wschodniej ścianie. Zauważmy przy tym, że uczeń musi rozumieć, że „miejsce o tym samym nachyleniu na zachodniej ścianie" nie oznacza identycznej wartości pochodnej, jaka została wyliczona po stronie wschodniej. Górny brzeg tamy wypada na poziomie 0, więc obliczenie szerokości tamy wymaga znalezienia pierwiastków wielomianu f. Pole powierzchni tamy to całka na przedziale wyliczonym przy znajdowaniu szerokości tamy. W kolejnym etapie zadania zakładamy, że na dnie doliny znajduje się wieś, która po południu leży w cieniu. Przekrój poprzeczny terenu jest ciągle opisany tą samą funkcją. Na wzór włoskiej miejscowości Viganella w najwyższym punkcie wschodniego wzgórza ma zostać zbudowany maszt z obracanym lustrem do odbijania światła słonecznego. Należy wyznaczyć najmniejszą wysokość masztu, przy której światło słoneczne może osiągnąć najgłębszy punkt w przekroju doliny. A następnie należy wyznaczyć taką wysokość masztu, żeby cała ta dolina mogła być oświetlona. Druga część pierwszego zadania dotyczy funkcji $g(x) = 1/(1 - 2x)$. Podany jest wzór na n-tą pochodną tej funkcji. Trzeba go udowodnić, stosując indukcję.

To było pierwsze zadanie do wyboru z analizy. Przechodzimy do zadania drugiego. Przebieg temperatury na zewnątrz domu jest opisany zadaną wzorem funkcją f, określoną na przedziale od 0 do 24 (rys. 6). Jest to funkcja sinus z odpowiednim przesunięciem i przeskalowana. Jej wykres jest podany. Jest to wykres K_f, natomiast K_g jest wykresem temperatury zmierzonej wewnątrz domu. Oba te wykresy pokazane są na rys. 6. W punkcie a) zadania należy obliczyć, o której godzinie temperatura zewnętrzna jest najmniejsza, o której największa, przez ile godzin tego dnia temperatura wyniosła co najmniej 22°, kiedy przyrost temperatury zewnętrznej jest największy. Następnie trzeba wyznaczyć średnią temperaturę między godziną 6 a 18. W punkcie b) należy określić wzór funkcji g, której wykres K_g mamy zadany. Trzeba też opisać, jak wykres funkcji g powstaje z wykresu funkcji sinus. Należy też podać możliwe przyczyny czasowego przesunięcia w wykresach funkcji f i g. Na koniec należy określić, o której godzinie różnica między temperaturą wewnętrzną i zewnętrzną jest największa. W punkcie c) podany jest przewidywany przebieg temperatury zewnętrznej następnego dnia. Jest on wyrażony funkcją h, zadaną

2. Przebieg temperatury na zewnątrz domu w czasie dnia można opisać za pomocą funkcji f

$$f(x) = 8 \cdot sin[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)] + 21; \quad 0 \leq x \leq 24$$

(x w godzinach, $f(x)$ w stopniach C). Rysunek pokazuje wykres K_f funkcji f oraz wykres K_g temperatury zmierzonej wewnątrz domu.



a) (5 pkt) Oblicz, o której godzinie temperatura zewnętrzna jest najmniejsza, a o której największa. Przez ile godzin tego dnia temperatura zewnętrzna wynosiła co najwyżej 22^oC? Kiedy przyrost temperatury zewnętrznej jest największy? Określ średnią temperaturę zewnętrzną między godziną 6 a 18.

b) (7 pkt) Określ wzór funkcji g, której wykres przedstawia przebieg temperatury K_g. Opisz, jak K_g powstaje z wykresu funkcji $y = sin(x)$. Podaj możliwe przyczyny czasowego przesunięcia w wykresach K_f i K_g. O której godzinie różnica pomiędzy temperaturą wewnętrzną i zewnętrzną jest największa?

c) (6 pkt) Przewiduje się, że następnego dnia przebieg temperatury zewnętrznej będzie opisany funkcją h gdzie $h(x) = 12 \cdot sin[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)] + ax + b; 24 \leq x \leq 48$. Przy czym dla $x = 24$ wartości funkcji f oraz h oraz ich przyrosty są takie same. Oblicz a i b. Uzasadnij, dlaczego drugiego dnia średnia temperatura zewnętrzna może być obliczona tylko przy użyciu wyrazu $ax + b$.

Rys. 6. Przykładowe zadanie z części do wyboru. Analiza

na przedziale od 24 do 48, której wzór zawiera dwa parametry. Trzeba wyznaczyć wartości tych parametrów oraz uzasadnić, dlaczego średnia temperatura zewnętrzna w drugim dniu może być obliczona przy użyciu tych parametrów.

Trzecie zadanie z listy zadań z analizy do wyboru jest znowu zadaniem z kontekstem praktycznym (rys. 7). Dany jest zbiornik o pojemności 1200 litrów. Ilość płynu zawartego w zbiorniku opisana jest funkcją $f(t) = 1000 - 800e^{-0{,}01t}$ dla t nieujemnego, gdzie t podane jest w minutach, a $f(t)$ w litrach. W części a) zadania trzeba obliczyć, w jakim czasie zbiornik będzie zapełniony do połowy. Następnie należy wykazać, że ilość płynu w zbiorniku stale rośnie i określić średnią ilość płynu w czasie pierwszej godziny napełnienia zbiornika. Trzeba też sprawdzić, czy przepisy mówiące o tym, że zbiornik może być zapełniony co najwyżej w 85% są tu spełnione. W części b) zadany jest inny zbiornik, z dopływem i odpływem, zawierający początkowo 200 litrów płynu. W ciągu minuty napływa 10 litrów i wypływa 1% zawartości zbiornika. Proces ten opisany jest równaniem różniczkowym $B'(t) = a - bB(t)$.

3.1 Pojemność zbiornika wynosi 1200 litrów. Ilość zawartego płynu w zbiorniku w czasie t jest opisana za pomocą funkcji f zadanej wzorem $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0,01t}$; $t \geq 0$, (t w minutach, $f(t)$ w litrach).

a) (6 pkt) W jakim czasie zbiornik będzie napełniony do połowy? Wykaż, że ilość płynu w zbiorniku stale rośnie. Określ średnią ilość płynu w czasie pierwszej godziny napełniania zbiornika. Przepisy bezpieczeństwa pozwalają na napełnienie zbiornika do co najwyżej 85% objętości. Czy przepis ten będzie spełniony w wyżej opisanym procesie napełniania zbiornika? Odpowiedź uzasadnij.

b) (3 pkt) W innym zbiorniku z dopływem i odpływem znajduje się na początku 200 litrów płynu. Z jednej strony przybywa 10 litrów płynu na minutę, z drugiej strony odpływ płynu jest równy 1% zawartości zbiornika na minutę. Proces ten jest opisany za pomocą równania różniczkowego $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ Oblicz a i b. Wykaż, że funkcja f jest rozwiązaniem tego równania różniczkowego.

c) (5 pkt) Proces opisany w b) został tak zmieniony, że w ciągu minuty 12 litrów płynu przybywa, a 2% zawartości ubywa. Początkowa ilość płynu jest równa 200 litrów. Wyznacz funkcję, która opisuje ten proces napełniania zbiornika. Ile płynu wypłynęło z tego zbiornika w ciągu pierwszej godziny?

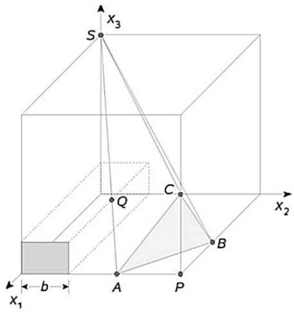
3.2 (4 pkt) Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie $a_0 = 5$; $a_{n+1} = 10 + 0,8a_n$ dla $n \in N$. Liczba 50 jest ograniczeniem górnym tego ciągu. Wykaż, że ciąg ten jest ściśle rosnący. Uzasadnij, że ciąg ten jest zbieżny i oblicz jego granicę

Rys. 7. Przykładowe zadanie z części do wyboru. Analiza

Trzeba wyznaczyć współczynniki a i b w tym równaniu różniczkowym oraz zauważyć, że funkcja f z punktu a) zadania jest rozwiązaniem tego równania różniczkowego. Punkt c) jest modyfikacją punktu b). W ciągu minuty wpływa 12 litrów, a wypływa 2% zawartości. I znowu trzeba wyznaczyć funkcję, która opisuje ten proces. Podobnie, jak zadanie pierwsze, zadanie trzecie ma jeszcze drugą część, nie związaną z pierwszą. Jest zadany ciąg określony rekurencyjnie. Wiadomo, że liczba 50 jest jego górnym ograniczeniem. Należy wykazać, że ciąg ten jest ściśle rosnący, zbieżny i policzyć jego granicę.

W grupie zadań do wyboru z geometrii były dwa zadania, za 16 punktów każde. Opiszę tylko jedno z nich. Dany jest sześcian, w który wpisany jest ostrosłup o podstawie ABC i wierzchołku S (rys. 8). Należy wyznaczyć równanie płaszczyzny E, w której leży podstawa ostrosłupa i obliczyć kąty nachylenia krawędzi ostrosłupa do podstawy sześcianu. Trzeba też sprawdzić, czy wysokość ostrosłupa leży na przekątnej PS sześcianu. Interesujące jest, że w zadaniu tym podano poszukiwane równanie płaszczyzny jako rozwiązanie częściowe. Wskazywałoby to, że od ucznia oczekuje się tu uzasadnienia poprawności tego równania. Kolejne polecenie to obliczyć, jakim procentem objętości sześcianu jest objętość ostrosłupa. I na koniec: w sześcianie jest zawarty prostopadłościan, który leży na podstawie, w lewym, dolnym rogu sześcianu. Szerokość podstawy prostopadłościanu wynosi b, a jego wysokość jest taka, by

1. W sześcianie o wierzchołkach $O = (0, 0, 0)$, $P = (10, 10, 0)$, $S = (0, 0, 10)$ znajduje się ostrosłup o podstawie trójkąta i wierzchołku S . Wierzchołkami podstawy ostrosłupa są: $A = (10, 6, 0)$, $B = (6, 10, 0)$, $C = (10, 10, 5)$.



a) (6 pkt) Wyznacz równanie płaszczyzny E, w której leży podstawa ostrosłupa. Oblicz kąty nachylenia krawędzi ostrosłupa do podstawy sześcianu. Sprawdź, czy wysokość ostrosłupa leży na przekątnej PS sześcianu.

b) (5 pkt) Jakim procentem objętości sześcianu jest objętość ostrosłupa?

c) (5 pkt) Dodatkowo w sześcianie obok ostrosłupa został położony prostopadłościan o szerokości b. Wymiary prostopadłościanu zostały tak dobrane, że ma on tylko jeden punkt wspólny Q z krawędzią AS ostrosłupa (patrz rysunek). Jaką objętość ma taki prostopadłościan o szerokości $b = 4$? Jakie wartości może przyjmować objętość prostopadłościanu, jeżeli szerokość b jest zmienną?

Rys. 8. Przykładowe zadanie z części do wyboru. Geometria

dotykał zadanego ostrosłupa tylko w jednym punkcie. Trzeba wyliczyć objętość tego prostopadłościanu, gdy $b = 4$, a następnie, ogólnie, przedstawić tę objętość jako funkcję zmiennej b.

Przechodzimy do francuskich zadań maturalnych, zebranych w pracy Guzickiego. Przypomnijmy, że we Francji jest wiele różnych rodzajów matur. Nawet w szkołach o najwyższym poziomie wymagań są matury o różnych profilach: przyrodniczym (o nazwie *science*), literackim i ekonomicznym. Omówimy maturę w wersji *science*. Pisze ją około 25% rocznika. W pracy Guzickiego podany jest przykładowy zestaw z roku 2005. Składał się on z 4 zadań. Można było uzyskać maksymalne 20 punktów łącznie ze wszystkich zadań. Czas pracy wynosił 3 godz. 50 minut. Przytoczę zadanie czwarte, najtrudniejsze, za 6 punktów (rys. 9).

Dana jest funkcja $f(x) = 3e^{0,25x}/(2 + e^{0,25x})$. W części A zadania należy udowodnić, że można jej wzór przekształcić do postaci $f(x) = 3/(1+2e^{-0,25x})$. Trzeba policzyć granice tej funkcji w plus nieskończoności i w minus nieskończoności oraz zbadać jej monotoniczność. Ta część jest bardzo standardowa.

Zadanie 4. (6 pkt)

Część A

Niech f będzie funkcją zdefiniowaną na R wzorem
$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1. Udowodnij, że $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

2. Oblicz granice funkcji f w $+\infty$ i w $-\infty$.

3. Zbadaj monotoniczność funkcji f.

Część B

1. W laboratorium badano rozwój populacji małych gryzoni. Wielkość populacji, w zależności od czasu t, jest oznaczana symbolem $g(t)$. Definiujemy w ten sposób funkcję g na przedziale $(0, +\infty)$. Zmienna rzeczywista t oznacza czas, liczony w latach. Jednostką wybraną dla $g(t)$ jest sto sztuk. Modelem używanym do opisu tej populacji jest rozwiązanie g, określone na przedziale $(0, +\infty)$, równania różniczkowego
$(E_1)\ \ y' = \frac{y}{4}$.

a) Rozwiąż równanie różniczkowe (E_1).

b) Wyznacz wzór funkcji g przy założeniu, że w chwili $t = 0$ populacja składała się ze 100 gryzoni, tzn. $g(0) = 1$.

c) Po ilu latach populacja przekroczy pierwszy raz liczbę 300 gryzoni?

2. W rzeczywistości, w obserwowanej części danego obszaru, ten wzrost jest spowalniany przez drapieżnika, który zabija pewną liczbę gryzoni. Oznaczmy przez $u(t)$ liczbę gryzoni żyjących w chwili t (wyrażanej w latach) w tym obszarze i przyjmijmy, że tak zdefiniowana funkcja u spełnia warunki

$(E_2):\ \ u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12}$ dla każdego $t \geq 0$, przy czym $u(0) = 1$.

a) Zakładamy, że dla każdej liczby rzeczywistej $t > 0$ mamy $u(t) > 0$. Rozważmy funkcję h zdefiniowaną na przedziale $\langle 0, +\infty)$ wzorem $h = \frac{1}{u}$. Udowodnij, że funkcja u spełnia warunki (E_2) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja h spełnia warunki:

$(E_3):\ \ h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$ dla każdego $t \geq 0$, przy czym $h(0) = 1$.

b) Podaj rozwiązania równania różniczkowego $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ i wyprowadź stąd wzór funkcji h, a następnie wzór funkcji u.

c) Jak w tym modelu zachowuje się wielkość badanej populacji, gdy t dąży do $+\infty$?

Rys. 9. Przykładowe zadanie z Francji

Część B ma sformułowanie odwołujące się do kontekstu praktycznego. W laboratorium badano rozwój populacji małych gryzoni. Wielkość populacji, w zależności od czasu t, oznaczana jest symbolem $g(t)$. To zadaje funkcję rzeczywistą g, na przedziale od 0 do plus nieskończoności. Czas t jest liczony w latach, jednostką wybraną dla $g(t)$ jest 100 sztuk. Modelem używanym do opisu populacji jest równanie różniczkowe $y' = y/4$. Należy rozwiązać to równanie różniczkowe oraz wyznaczyć wzór funkcji g przy założeniu, że w chwili $t = 0$ populacja składała się ze 100 gryzoni. Trzeba też policzyć po ilu latach populacja pierwszy raz przekroczy 300 gryzoni. Następny etap zadania zawiera dodatkowe utrudnienie. Do podanego modelu wprowadzona jest modyfikacja polegająca na tym, że w obserwowanej części danego obszaru, wzrost populacji jest spowalniany przez drapieżnika. W tej nowej sytuacji liczba gryzoni opisana jest funkcją $u(t)$, która jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y' = y/4 - y^2/12$. Zakładamy, że dla każdego nieujemnego t wartość funkcji $u(t)$ jest większa od 0. Wprowadzamy funkcję pomocniczą $h(t) = 1/u(t)$. Należy pokazać, że funkcja u spełnia powyższe równanie różniczkowe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja h spełnia równanie różniczkowe $y' = -y/4 + 1/12$. To ostatnie równanie trzeba rozwiązać i znaleźć wzór na funkcję h, a następnie na funkcję u. Na koniec trzeba zbadać, jak w tym modelu zachowuje się wielkość badanej populacji, gdy czas dąży do nieskończoności.

Podsumowując, chciałbym podzielić się kilkoma obserwacjami, które nasuwają się już przy pierwszym oglądzie przytoczonych danych. Oczywiście, materiał zgromadzony w trzech omawianych pracach pozwala wyciągać wiele różnorodnych wniosków. Ograniczę się do kilku podstawowych. Po pierwsze, w systemach edukacji w omawianych krajach widoczne jest dużo większe niż w Polsce zróżnicowanie egzaminów z matematyki. Jest wiele typów szkół, a w ich ramach zdarzają się – jak na przykład we Francji – różne typy egzaminów. W związku z tym występuje duże zróżnicowanie zakresu wymagań egzaminacyjnych. Po drugie, na egzaminach, niezależnie od tego, czy to jest Francja, Austria czy Niemcy często stosowane są zadania z kontekstem praktycznym. Można nawet powiedzieć, że w wielu wypadkach jest to podstawa tych egzaminów. Praktyczny kontekst zadań jest obecny niezależnie od tego, czy jest to wyższy, czy niższy poziom egzaminów. I trzecia obserwacja. Na maturach o najwyższym poziomie trudności, które tutaj referowałem (i podobnie jest na maturze austriackiej), wymagane są elementy analizy matematycznej. Przy czym nie chodzi tu o dogłębną znajomość definicji pojęć rachunku różniczkowego i całkowego, na przykład pojęcia granicy, a raczej o umiejętność posługiwania się pochodnymi, całkami czy równaniami różniczkowymi w celu dokonywania obliczeń. Myślę, że interesująca byłaby próba odpowiedzi na pytanie, do jakiego stopnia te tendencje mają lub powinny mieć swoje odzwierciedlenie w polskich szkołach i w polskich zadaniach maturalnych.

DYSKUSJA

Doktor Bożena Rożek (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie) – Jestem autorką pracy, która była wymieniana na początku konferencji. Jej temat to: *Edukacja matematyczna w Niemczech na poziomie Grundschule (klasy I-IV)*, czyli dotyczy etapu wczesnoszkolnego. W referacie podano informację, że dzieci w wymienionych krajach, także w Niemczech, rozpoczynają naukę szkolną w wieku 6 lat. Jest to dla nas ważna informacja ze względu na projekt obniżenia wieku szkolnego w Polsce. Warto więc uściślić informacje dotyczące obowiązku szkolnego w Niemczech. W Niemczech poszczególne kraje związkowe zachowują w kwestii oświaty niezależność od władzy centralnej. Państwo pozostawia autonomię w zakresie oświaty poszczególnym landom. Jeśli chodzi o dokładny wiek (lata i miesiące), od którego dziecko objęte jest obowiązkiem szkolnym, jest on ustalany przez każdy land osobno. W określeniu obowiązku szkolnego istotna jest data (rok i miesiąc) urodzenia dziecka. Każdy land ustala tzw. datę graniczną (Stichtag), w większości landów jest to data 30 czerwca. Dziecko kończące 6 lat przed określoną datą graniczną (np. przed 30 czerwca) ma obowiązek rozpocząć naukę szkolną w danym roku kalendarzowym, czyli w wieku 6 lat. O rozpoczęciu nauki szkolnej dziecka urodzonego po określonej dacie granicznej mogą zadecydować rodzice, czyli to dziecko może rozpocząć naukę w szkole w wieku 6 lat lub za rok w wieku 7 lat. Decyzję w tej sytuacji podejmują rodzice. Myślę, że informację te uścislą kwestię rozpoczęcia nauki szkolnej w innych krajach europejskich. Dziękuję.

Doktor Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz (redakcja pisma „Matematyka") – Chciałam dodać do prezentacji systemów nauczania matematyki w różnych krajach, że również nasze czasopisma się tymi sprawami zajmowały: *Matematyka w szkole* i *Matematyka*, reprezentowana przeze mnie, też. Opisaliśmy Włochy i Francję, nie mieliśmy, niestety, Niemiec, ale mamy też bardziej egzotyczne tematy, bo pisaliśmy o oświacie w Turcji, a ostatnio w Norwegii. I to jest bardzo interesujące, ponieważ Norwegia wyczołguje się z głębokiego kryzysu edukacyjnego w tej chwili i to w imponujący sposób. Tam naprawdę zaczynają porządnie uczyć. Sposób przedstawienia tego jest troszeczkę inny niż u Pana, ponieważ myśleliśmy o tym, żeby to również było przydatne dla nauczycieli, a więc także zadania maturalne z różnych krajów drukujemy wraz z rozwiązaniami i ze schematem oceniania albo przynajmniej z punktacją. Zachęcam, mam tu kilka numerów z zadaniami z Norwegii dla chętnych, może nie starczy dla wszystkich, a może będzie za dużo, w każdym razie są do rozdania. Dziękuję.

Doktor hab. Edward Tutaj (Uniwersytet Jagielloński) – Czy dzieci w Niemczech, które są po Hauptschule i Realschule mają zamkniętą drogę do studiów wyższych? Z tego grafiku tak by wynikało.

Profesor Krzysztof Chełmiński (Politechnika Warszawska) – To nie jest tak do końca. To jest tylko rysunek schematyczny, który Pan Koźniewski przedstawił. Jestem jednym z autorów tej przedstawionej pracy o Niemczech. W tej pracy jest jeszcze inny rysunek, taki ze strzałeczkami, które pokazują, jak tak naprawdę dzieci mogą się przesuwać pomiędzy ścieżkami kształcenia. Oczywiście, są możliwości przejścia. Mało tego, nawet na początku, po tej szkole podstawowej też są możliwości przejścia ze ścieżki do ścieżki. Jak dziecko ma tylko 6+4 – dziesięć lat, to czasami nie bardzo wiadomo, którą ścieżką kształcenia powinno iść, więc dokładnie opisaliśmy, jaki jest procent zmian, i jak te zmiany się odbywają. Tak samo później. Później też oczywiście dostęp do matury nie jest zamknięty.

Profesor Zbigniew Marciniak – Chciałbym powiedzieć dwie rzeczy. Po pierwsze, jeśli Państwo zerkną w tę nową podstawę programową, to Państwo dostrzegą, że w zasadzie cały bagaż matematyczny, który był potrzebny do rozwiązania tych zadań, można odnaleźć w podstawie rozszerzonej, a ponadto będzie odpowiednia liczba godzin na nauczenie tych treści. A także podobna część populacji będzie poddana kształceniu w tym zakresie, więc sytuacja się wyrówna około roku 2015. Natomiast pozostaje kwestią otwartą – i to jest rzecz do dyskusji, rozstrzygnięcia – na ile trzeba te zadania ubierać w „garniturek” tych wzgórz itd. To samo pytanie można sformułować czysto matematycznie i te same wymagania postawić. To jest pytanie, na ile wpływ na to, co się dzieje na egzaminach, mają ludzie z zastosowań matematyki, inżynierowie itd. Tam, gdzie proces centralnego egzaminowania jest okrzepły od lat i bardziej uspołeczniony, tam więcej interesariuszy „macza w nim palce” i zadania stają się bliższe praktyki. Czy to daje lepsze efekty edukacyjne? – nie wiem. Mnie się zdaje, że dużo łatwiej zdiagnozować niedostatki edukacji, gdy mamy wysublimowaną umiejętność czysto matematyczną. Natomiast jest to kwestia przyzwyczajeń systemu i pewnej tradycji. U nas stało się tradycją w latach 70., jak się pojawił po raz pierwszy rachunek różniczkowy w wersji bardzo ambitnej, że uczniowie mają rozumieć, o co chodzi. Natomiast w niektórych krajach, w tym w Niemczech, przyjęta jest inna zasada, że wystarczy, gdy uczniowie znają użyteczne algorytmy, związane z liczeniem pochodnych itp. Cokolwiek by to była ta pochodna, uczeń ma wiedzieć, jak się ją liczy w prostych sytuacjach i to jest dużo prostsza czynność i umiejętność niż analizowanie, czy pochodna istnieje. Wobec tego, jest to kwestia wyboru w obrębie systemu edukacji.

NAUCZANIE POCZĄTKOWE MATEMATYKI

ZBIGNIEW SEMADENI

Uniwersytet Warszawski
e-mail: semadeni@mimuw.edu.pl

Omawiamy tu projekt badawczy, którego główne pytanie w mojej grupie brzmiało: ***zdiagnozować stan nauczania początkowego matematyki tuż przed rozpoczęciem reformy programowej, tak by prowadziło to do wniosków dotyczących wdrażania tej reformy i ewentualnych zagrożeń***. Najważniejsze kwestie wiązały się z projektowanym obniżeniem wieku szkolnego.

Wyodrębniliśmy trzy główne grupy zagadnień do zbadania.

1) Jaki jest stan wiedzy matematycznej uczniów po klasie III szkoły podstawowej?
2) Jak wygląda realizacja nauczania zintegrowanego po reformie z roku 1999 (istotnymi zmianami były m.in. brak wyodrębnionych zajęć z matematyki, ocena opisowa)? Jak te doświadczenia można wykorzystać przy wprowadzaniu obecnie dalszych zmian procesu nauczania?
3) Jak prezentują się najnowsze polskie podręczniki z lat 2008 i 2009 do nauczania początkowego w zakresie edukacji matematycznej, przygotowane – zgodnie z deklaracjami wydawców – do nowych podstaw programowych?

Ponadto postanowiliśmy zbadać dwie kwestie bardziej szczegółowe:

4) Spróbować rozstrzygnąć – trwający już z górą 40 lat – zasadniczy spór dotyczący metodyki wprowadzania mnożenia i dzielenia w dotychczasowej klasie I.
5) Porównać założenia polskiej początkowej edukacji matematycznej z tym, co jest przyjęte w Niemczech.

Otrzymane wyniki zestawione zostały w 6 opracowaniach. Omówię je tu pokrótce.

Ad 1) ***Badanie wiedzy matematycznej uczniów po klasie III szkoły podstawowej***

Wyniki tych badań, najważniejszych w omawianej tu grupie zagadnień, wykonanych przez zespół pod kierunkiem dr **Agnieszki Demby** (IM UG), przedstawione są poniżej w osobnym artykule.

Ad 2) ***Zmiany efektywności nauczania, w tym edukacji matematycznej dzieci, po wprowadzeniu kształcenia zintegrowanego i oceny opisowej***

Wykonawcy: dr **Zofia Muzyczka** (Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu), mgr **Krystyna Sawicka** (Kuratorium woj. lubelskiego, filia w Chełmie)

Badania prowadzono w 41 szkołach powiatów: nowosądeckiego i gorlickiego oraz w 20 szkołach powiatów: chełmskiego i włodawskiego (na tzw. „ścianie wschodniej"). Chodziło o analizę efektywności zmienionych form kształcenia i oceniania uczniów w klasach I-III w pierwszym dziesięcioleciu od reformy nauczania w 1999 r. Wiele z badanych szkół było małych, nieraz obejmowały tylko klasy I-III, w tym sporo było klas łączonych (np. klasy 0 i 1). Szczególny nacisk położono na stan edukacji matematycznej w tych klasach, analizowany na szerszym tle całego systemu kształcenia zintegrowanego. Badano opinie nauczycieli i rodziców.

Okazało się, że znakomita większość nauczycieli klas I-III bardzo dobrze oceniła nowy system pracy z dziećmi, wymieniając jako zalety m.in. łagodne przejście od wychowania rodzinnego i przedszkolnego do edukacji szkolnej, bazowanie na doświadczeniach ucznia, organizowanie zajęć pod kątem aktywności dziecka, powiązanie treści z różnych dziedzin.

Jednakże – wbrew werbalnym deklaracjom badanych osób, że teraz dziecko ma zdobywać wiedzę i umiejętności w trakcie działań praktycznych – na zajęciach matematycznych nadal zdecydowanie dominuje praca z zeszytami ćwiczeń do wypełniania. W kształceniu i doskonaleniu nauczycieli należy więc uwzględnić w większym stopniu praktyczną znajomość wykorzystywania konkretnych przedmiotów w początkowej edukacji matematycznej.

Badane osoby akcentowały też obecną możliwość doprowadzenia do zakończenia wykonywanego zadania bez przerywania pracy z dzwonkiem na koniec lekcji. Jednak w wielu szkołach w dalszym ciągu prowadzone są zajęcia w układzie: 45-minutowa lekcja, potem przerwa, zgodnie z harmonogramem całej szkoły. Były też i negatywne oceny sytuacji szkolnej: za mało czasu na typowe zajęcia, za dużo ćwiczeń do wypełniania, trudno o dobre podręczniki. W wielu szkołach zakłada się realizację kilku celów edukacyjnych w tym samym czasie, co prowadzi do nieskutecznego nauczania.

Nauczyciele podkreślają, że edukacji matematycznej nie da się integrować treściowo, toteż starają się organizować to w formie odrębnych zajęć. W raporcie opisano też, jak nauczyciele oceniają zakres nowej podstawy programowej z edukacji matematycznej dla klas I-III.

Jednym z kluczowym pytań badawczych było, ile czasu tygodniowo przeznacza się na edukację matematyczną w sytuacji, gdy nie jest to obecnie narzucone rozporządzeniem MEN, lecz jest ustalane przez nauczycieli indywidualnie i elastycznie. Okazało się, że najczęściej jest to 5 godzin tygodniowo, a więc o jedną godzinę więcej, niż wymagano do 1999 r.

Badano też zmiany spowodowane wprowadzeniem oceny opisowej. Opinie nauczycieli o niej są zróżnicowane, ale przeważa opinia negatywna, chociaż ocenianie opisowe znacznie bardziej odpowiada potrzebom dzieci i wspiera je. W wielu szkołach wprowadzono oceny cyfrowe (1-6 lub 2-6) przy ocenianiu bieżącym. Rodzice już się przyzwyczaili do oceny opisowej, ale są też zadowoleni z ocen bieżących w postaci cyferek. Należy przemyśleć charakter oceny po wprowadzeniu nowej podstawy programowej, tak by stanowiła rzetelną informację o umiejętnościach ucznia dla nauczycieli klasy czwartej, którzy nieraz uważają, że z oceny opisowej zazwyczaj wynika, że dzieci dobrze się uczą, a za mało jest konkretnych informacji o ich wiedzy i możliwościach.

Analizowano problemy pojawiające się przy przejściu ucznia do IV klasy. Nauczyciele sygnalizowali m.in. brak znajomości tabliczki mnożenia, trudności z zadaniami tekstowymi i kłopoty z formułowaniem zdań, zarówno ustnym jak i pisemnym (co może być skutkiem nagminnego stosowania kart pracy, w których dziecko tylko coś uzupełnia), brak zdolności do dłuższej koncentracji, brak czasu na utrwalenie materiału. Okazuje się, że w klasach IV-VI najniższe średnie oceny przypadają na klasę piątą, a także potwierdza się fakt niewystarczających kontaktów nauczycieli klas I-III z „przedmiotowcami", w tym z nauczycielami matematyki w klasach IV-VI.

Dodatkowo przeprowadzono badanie umiejętności rachunkowych u uczniów kończących klasę I, a następnie powtórzono je z tymi samymi uczniami w klasie II w drugim tygodniu września. Nie stwierdzono dużej różnicy. Uczniowie chętnie i bez trudności rachowali w zakresie 20, ale zbyt byli przyzwyczajeni do typowych zadań i nie czytali poleceń.

Ad 3) ***Kształtowanie pojęć matematycznych (studium teoretyczne)***

Wykonawca: prof. **Zbigniew Semadeni** (emerytowany profesor IM UW)

Punktem wyjścia tego studium były wyniki badań prowadzonych w ostatnim ćwierćwieczu w wielu krajach, opartych na teoriach konstruktywistycznych z pogranicza pedagogiki i psychologii, dotyczących rozwoju pojęć matematycznych u uczniów. Specjalną uwagę zwrócono na te wszystkie aspekty, w których praktyka nauczania w polskich szkołach jest wyraźnie niezgodna z danymi pochodzącymi z owych badań.

Wśród analizowanych kwestii są:

(a) pojęcia kształtowane bez ich definiowania (np. kwadrat) i te, których kształtowanie wymaga sformułowania definicji (np. trapez),

(b) konstruowanie znaczenia pojęcia,

(c) kontrowersje związane z interpretowaniem zasady paralelizmu w dydaktyce (zgodność ontogenezy z filogenezą),

(d) przedwczesny nacisk w nauczaniu na kształtowanie pojęć oddzielonych od rachowania i od praktycznych zastosowań,

(e) problem redukowania pojęć do bardziej podstawowych (w szczególności do pojęć mnogościowych),

(f) problem wiązania różnych pojęć przy ich kształtowaniu (w szczególności wiązania działań z działaniami odwrotnymi),

(g) problem kolejności wprowadzanych pojęć (powinno to być zgodne z naturalnym rozwojem pojęć u ucznia, a niekoniecznie zgodnie z ich miejscem w strukturze matematyki jako nauki),

(h) rozróżnienie: przypadki typowe, przypadki nietypowe, przypadki specjalne i przypadki skrajne,

(i) przejście od procesu do pojęcia w arytmetyce i algebrze poprzez kondensację procedury,

(j) zarys tego, jak pojęcia i sądy ukształtowane w późniejszym etapie rozwoju zostają integrowane z dotychczasowymi strukturami (Piaget),

(k) etapy rozwojowe: intra, inter, trans (Piaget i Garcia),

(l) zjawisko spłaszczania się hierarchii pojęć,

(m) koncepcja „trzech światów” matematyki D. Talla („świat” pojęciowo-percepcyjny, czynnościowo-symboliczny, formalno-aksjomatyczny).

Ad 3 cd.) ***Analiza pewnych niepokojących zjawisk dotyczących polskich podręczników z lat 2008 i 2009 do nauczania początkowego w zakresie edukacji matematycznej***

Wykonawca: prof. **Zbigniew Semadeni**

Celem tych badań jest próba odpowiedzi na pytania:

> *Do jakiego stopnia uzasadniona jest obawa, wyrażana po opublikowaniu nowych podstaw w grudniu 2008 r., że w nowych podręcznikach, reklamowanych jako dostosowane do reformy i do obniżonego wieku szkolnego, pojawią się treści i formy niedostosowane do naturalnego rozwoju 6-latków? Czy nauczyciele i rodzice mogą mieć zaufanie, że podręcznik zatwierdzony przez MEN jest rzeczywiście zgodny z podstawą programową? Czy podręcznik może zawierać nieoznakowane treści, które wyraźnie wykraczają poza wymagania sformułowane w podstawie (w szczególności treści wymienione w podstawie dla następnych klas)? Do jakiego stopnia podręcznik powinien uwzględniać ogólne założenia reformy i w jaki sposób można to stwierdzać?*

Raport ukazuje jasno, że pytania te są zasadne, bowiem spora część obecnie funkcjonujących na rynku, dopuszczonych przez MEN podręczników dla uczniów klasy I nie spełnia tych oczywistych, zdawałoby się, wymagań. Przeanalizowane obecne polskie podręczniki pozostają w tym raporcie anonimowe. Ich autorzy i wydawcy nie są tu wymienieni. Celem tego raportu nie jest bowiem krytykowanie poszczególnych podręczników, lecz zasygnalizowanie pewnych niepokojących, ogólnych zjawisk. Oprócz podręczników przedmiotem badania były też towarzyszące im zeszyty ćwiczeń. Zeszyt taki nie ma wprawdzie statusu środka dopuszczonego przez MEN, ale znajduje się w jednym pakiecie z podręcznikiem dopuszczonym i traktowany jest przez nauczyciela jako integralna część pakietu.

Analizowane podręczniki różnią się znacznie pod względem ich jakości dydaktycznej. Niektórych z nich poniższe uwagi dotyczą w niewielkim stopniu, w innych natomiast widać znaczne nagromadzenie usterek czy nawet wyraźnych błędów dydaktycznych. Badano m.in. następujące kwestie:

- *Zróżnicowanie podręczników* – okazało się, że jedne z nowych podręczników do I klasy są adresowane do 6-latków, inne do 7-latków będących już po roku nauki;
- *Zgodność z podstawą po obniżeniu wieku szkolnego* – we wszystkich podręcznikach do I klasy stwierdza się dość istotne rozbieżności: niedostateczne wspomaganie rozwoju myślenia operacyjnego, umieszczenie treści,

których nie ma w podstawie dla klasy I, a są w podstawie dla klas II-III (np. znaki „<" i „>", porównywanie różnicowe), umieszczenie zadań, których trudność zdecydowanie przekracza możliwości uczniów klasy I, a które nie są w żaden sposób oznakowane jako trudne, nadobowiązkowe lub jako zagadki dla chętnych).

Poruszone są także kwestie:

(a) Czy w ogóle jakakolwiek wydrukowana książka może być właściwym narzędziem do osiągnięcia takich celów kształcenia, jak wspomaganie rozwoju myślenia operacyjnego?

(b) Jak należy rozszerzyć określenie terminu „podręcznik" (zatwierdzony przez MEN), aby te cele można było realizować?

Oto główne, stwierdzone *wady*. Wszystkie badane podręczniki są typowymi przykładami tzw. *papierowej matematyki*. Zeszyty ćwiczeń dają gotowe sformułowania, nie uczą myślenia; z drugiej strony nauczyciel i uczeń często mają odgadnąć, co autor miał na myśli. Ponieważ uczeń nie umie jeszcze czytać, usiłuje się pokazać na rysunkach to, czego nie da się przedstawić rysunkowo. Te pozorne ułatwienia obracają się przeciw dzieciom. Zniknęły na szczęście równania z niewiadomą x, są na ich miejsce równania z okienkami, ale na ogół bez śladu objaśniania, skąd się biorą. Brak dostatecznej liczby powtórzeń. Spotyka się źle pomyślane upoglądowienia arytmetyki, pseudoczynnościowe zadania oraz niezrozumiałe polecenia. Analizowany jest problem pułapki ogólnych poleceń w zeszytach ćwiczeń (dążenie do zwięzłych, możliwie jednozdaniowych, ogólnych poleceń, obejmujących wiele przypadków szczególnych, prowadzących do trudnych dla ucznia konstrukcji myślowych i gramatycznych). Zbyt wczesne przechodzenie do złożonych operacji umysłowych i do działań odwrotnych. Przedwczesne wprowadzanie nowych pojęć. Przedwczesne wprowadzanie nowych symboli. Pewne zadania, które 20 lat temu były w podręczniku dla II klasy, teraz pojawiają się w podręczniku dla dzieci o 2 lata młodszych, m.in. stosuje się zaawansowany szyk prostokątny (koordynacja rozumowania pion-poziom), zbyt trudny dla 6-latków.

Większość z dopuszczonych przez MEN podręczników nadużywa mieszanki najprzeróżniejszych umownych środków graficznych, z reguły nie wyjaśniając ich dzieciom i wymagając, by domyśliły się ich sensu. Niektóre z nich są użyte tylko w jednym zadaniu, inne pojawiają się więcej razy. Autorzy większości badanych podręczników zdają się wierzyć, że każdy schematyczny rysunek pojawiający się u nich w podręczniku dla 6-latków będzie sam przez się zrozumiały dla uczniów. Wiadomo jednak, że jeśli te rysunki nie przedstawiają sytuacji znanej dziecku i zrozumiałej, mniemanie o ich łatwości jest z gruntu fałszywe. Szczególnie często używane są strzałki, traktowane tak, jak gdyby każdorazowo sam fakt ich narysowania wyjaśniał dziecku ich sens. Sens ten zresztą nieraz się zmienia (bez żadnego uprzedzenia czy wyjaśnienia). W jednym z dopuszczonych podręczników do I klasy strzałka może mieć 6 różnych znaczeń, z których żadne nie jest objaśnione. Grafy działań można znaleźć w większości badanych podręczników do klasy I, ale na ogół nie są one wprowadzane w sposób zgodny z naczelną zasadą dydaktyki wczesnoszkolnej, wymagającej, by wszelkie nowe pojęcia matematyczne były wywodzone z przykładów zrozumiałych dla dzieci i powiązanych z manipulowaniem na konkretach – wprowadza się grafy jako nowy, formalny system znaków i nie widać przy tym należytej troski o stopniowanie trudności przy zadaniach związanych z grafami.

W raporcie odniesiono się również do *materiałów metodycznych* opublikowanych przez wydawców podręczników oraz analizowano podręczniki do klas II-III dopuszczone przez MEN przed rokiem 2008, choć tracą one w 2010 i 2011 r. status podręczników dopuszczonych. W jednym z nich, drukowanym jako dziesiąte wydanie w 2008 r., znajdują się – jako zwykły materiał – algorytmy mnożenia i dzielenia w klasie III usunięte z podstaw programowych w 1999 r. oraz porównywanie ilorazowe w klasie II (przesunięte w 2008 r. do klasy IV).

Ogólną konkluzją raportu jest, że problem jest poważny i powinien być jakoś rozwiązany przez MEN, jakkolwiek nie będzie to łatwe, bowiem silna jest obecnie w Polsce tradycja wypełniania gotowych zeszytów ćwiczeń i jest to sposób nauczania najłatwiejszy dla nauczyciela, choć dla uczniów, zwłaszcza klasy I, znacznie bardziej odpowiednie są czynności wykonywane na konkretach.

Ad 4) *Sposoby rozumowania dzieci w wieku 4-7 lat rozwiązujących zadania na mnożenie i dzielenie*

Wykonawca: mgr **Anna Wołyniak** (doktorantka Wydziału Pedagogicznego UW)

Celem tych badań empirycznych, podbudowanych teoretycznie przez wyniki badań psychologiczno-pedagogicznych prowadzonych w różnych krajach w ostatnim ćwierćwieczu, było ustalenie, *jakie są naturalne sposoby rozwiązywania zadań na mnożenie i dzielenie przez dzieci* i zestawienie ich z metodami postulowanymi przez polską tradycję metodyki nauczania początkowego. Przeprowadzano badania diagnostyczne, jakie nie były dotąd prowadzane na polskich dzieciach. Zbadano 64 dzieci w wieku 4-7 lat, które nie miały jeszcze doświadczeń związanych z uczeniem się mnożenia oraz dzielenia na sposób szkolny. Podejmowane przez nie czynności, najczęściej na konkretach, określić można jako naturalne sposoby rozwiązywania zadań związane z intuicyjnym rozumieniem przez dziecko sytuacji mnożenia oraz dzielenia. Wyróżniono cztery grupy spontanicznych strategii dzieci:

(a) „inscenizacja” opisywanej sytuacji na konkretach i liczenie przedmiotów,

(b) użycie własnych zbiorów zastępczych (palców i rysunków) do zilustrowania zadania i przeprowadzenia obliczeń,

(c) użycie przez dziecko podanych liczb jako obrazów przedmiotów opisanych w treści zadania i wykorzystanie tego do rozwiązania zadania,

(d) obliczenia w głowie, oparte na wcześniejszych doświadczeniach i na wiedzy utrwalonej wcześniej lub tworzonej na bieżąco.

Podobne grupy strategii wyróżniono, badając, jak dzieci radzą sobie z zadaniami na dzielenie, zróżnicowanymi na zadania typów: „podział” i „mieszczenie”. Polska dydaktyka matematyki wyraźnie różnicuje te dwa typy. Przy podziale znana jest liczba części, a pytamy, ile elementów będzie w jednej części; przy mieszczeniu jest odwrotnie – wiemy, ile elementów ma być w jednej części, a pytamy, ile będzie części. Od około 40 lat toczone były w Polsce spory, czy oba typy zadań sprawiają dzieciom taką samą trudność, czy też – jak głosiła Z. Cydzik – mieszczenie powinno być nauczane pierwsze jako łatwiejsze, czy też – odwrotnie – podział powinien być wcześniej. W przedstawianym raporcie opisane są wyniki badań, w których zadania na podział i na mieszczenie podawane były dzieciom naprzemiennie. Dają one wyraźną odpowiedź, kontrastującą z tym, co podaje się w polskich podręcznikach metodyki: *łatwiejsze dla dzieci do pojęcia i do obliczenia są zadania na podział.* Ponadto badania te pokazały, że poglądowe wprowadzanie treści, postulowane przez polskich dydaktyków matematyki, traktowanie jest w szkole formalnie i tylko pozornie stosowane. Przejście od błędnie interpretowanych konkretów do ich liczbowej interpretacji jest raptowne i pospieszne. Nie stosując dostatecznej liczby powtórzeń, nie utrwalając rozumienia nowego pojęcia u dziecka, wielu nauczycieli zaczyna pospieszny trening mający na celu czysto instrumentalne przyswojenie reguł i naukę tabliczki mnożenia. Znacząca liczba uczniów nie rozumie sensu mnożenia, jedynym skojarzeniem jest tabliczka mnożenia wyuczona na pamięć. Zbyt wczesne wprowadza się też dzielenie jako działanie odwrotne do mnożenia.

Ad 5) ***Porównanie edukacji matematycznej w Niemczech na poziomie Grundschule (klasy I-IV)***

Wykonawca: dr Bożena Rożek (IM, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków)

Analiza ta miała na celu porównanie edukacji matematycznej w Polsce według koncepcji reformy wprowadzanej w 2009 r. z tymi aspektami niemieckiej edukacji początkowej, które są odmienne od naszych. Brano przy tym pod uwagę trudności porównywania wynikające z tego, że kształcenie w Niemczech jest autonomiczne w każdym Landzie, a nadto początkowy etap edukacji w Niemczech (*Primarbereich*) trwa 4 lata. Oto ważniejsze ustalenia:

(a) Wiek obowiązku szkolnego (*Schulpflicht*) jest ustalany przez każdy Land osobno, a powszechne opinie obecnie słyszane w Polsce, że „w Niemczech dzieci rozpoczynają naukę szkolną w wieku 6 lat" są niepełne i fałszują aktualny obraz sytuacji.

(b) Opracowywany centralnie dokument *Bildungsstandards* nie jest odpowiednikiem polskiej podstawy programowej i pełni raczej funkcje wytycznych odnoszących się do treści oraz metod nauczania. Warto zwrócić uwagę na dwa działy, których nie ma w takim zakresie w polskich podręcznikach do klas I-III i do klasy IV. Są to: „Wzory (desenie) i struktury" (*Muster und Strukturen*) – czyli odkrywanie regularności, zarówno geometrycznych jak i arytmetycznych oraz „Dane, częstość i prawdopodobieństwo" (*Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*). W polskiej podstawie programowej z 2009 r. wymienia się jedynie po III klasie umiejętności: „*Uczeń: dostrzega symetrię (np. w rysunku motyla); zauważa, że jedna figura jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiej; kontynuuje regularny wzór (np. szlaczek)*".

(c) Niemiecka metodyka wyróżnia „na wpół pisemne" (*halbschriftliche*) algorytmy działań. Są częściowo zapisywaną, algorytmiczną procedurą przypominającą nasze obliczenia pamięciowe.

(d) W Niemczech dzieci już w najmłodszych klasach są zapoznawane z bryłami: kulą, sześcianem, prostopadłościanem, walcem, stożkiem, które badają i opisują, w szczególności liczą ściany, krawędzie i wierzchołki. Wyobraźnia przestrzenna rozwijana jest także przez tworzenie trójwymiarowych budowli z klocków i tworzenie planów tych budowli.

BADANIE WIEDZY MATEMATYCZNEJ UCZNIÓW PO KLASIE III SZKOŁY PODSTAWOWEJ

Agnieszka Demby

Uniwersytet Gdański
e-mail: ademby@mat.ug.edu.pl

Badanie zostało wykonane prez zespół kierowany przez dr *Agnieszkę Demby*. W skład zespołu wchodziło ponadto 6 osób: mgr Elżbieta Drewczynska-Mrożek (*doktorantka IM UG*), Magdalena Klinkosz, Aleksandra Góralska, Karolina Stachowicz (*studentki Matematyki UG*) oraz mgr Katarzyna Kroplewska i mgr Marta Szymańska (*nauczycielki matematyki w klasach IV-VI szkoły podstawowej*). Każda z tych osób opracowywała jedną część badań, zaprojektowaną i przydzieloną jej przez Agnieszkę Demby.

1. Cel i organizacja badań

Wiadomo, że przejście od nauczania początkowego do klasy IV jest dla wielu uczniów trudne. Jest to frustrujące dla nauczycieli klas początkowych i dla nauczycieli-matematyków w klasach IV-VI, którzy sugerują nieprzygotowanie uczniów w zakresie m.in. rachunku pamięciowego i rozwiązywania zadań tekstowych.

Celem prowadzonych badań było:

a) zebranie danych dotyczących stopnia opanowania przez absolwenta klasy III umiejętności matematycznych niezbędnych w klasie IV,

b) określenie typów błędnych rozwiązań uczniów,

c) wyróżnienie pewnych charakterystycznych grup uczniów i wskazanie różnic między nimi.

Badania przeprowadzono w roku 2007, gdy część treści matematycznych dotąd tradycyjnie nauczanych w klasach I-III została przesunięta[1] do podstawy programowej dla klas IV-VI.

Ze względów organizacyjnych współpracowano z Gdańską Fundacją Rozwoju im. Adama Mysiora. Wykorzystano test przeprowadzony przez nich we wrześniu 2007 r. w ramach tzw. *Sesji z Plusem 2007/2008.* Testowi temu poddano około 70 tys. polskich uczniów rozpoczynających naukę w klasie IV (wszystkich takich uczniów było wówczas w Polsce około 400 tys.). Brałam udział w przygotowaniach testu oraz kryteriów oceniania rozwiązań zadań.

Próbka polskich uczniów objętych tymi badaniami jest liczbowo duża. Naturalne jest pytanie, w jakim stopniu jest ona reprezentatywna. Z jednej strony, nauczyciele klas IV zgłaszali się dobrowolnie do badań GFR. Może więc faktyczne osiągnięcia polskich dzieci są niższe od tego, co wypadło w badaniach. Z drugiej zaś strony, testy organizowali nauczyciele klas IV, którzy nie mieli żadnego interesu w podciąganiu wyników w górę – bardziej zależało im na obiektywnym stwierdzeniu, z jaką naprawdę wiedzą i umiejętnościami przychodzą do nich uczniowie po klasie III.

Materiał poddany naszym analizom był dwojakiego rodzaju:

- uzyskane z GFR wyniki ilościowe testu (dla około 70 tys. uczniów),
- około 800 prac pisemnych – wypełnionych przez uczniów arkuszy testu.

Zależało nam bowiem nie tylko na interpretacji wyników ilościowych z GFR, ale i na bardziej szczegółowym opracowaniu wyników testu, w tym również pod względem jakościowym. Ważne bowiem jest, aby nie tylko wiedzieć, że dana umiejętność nie jest opanowana przez sporą grupę uczniów, ale i mieć świadomość, z czym konkretnie uczniowie mają trudności.

Prace pisemne uczniów uzyskane do bardziej szczegółowych analiz pochodziły z trzech województw, w których wyniki testu rok wcześniej (2006) były zbliżone do średniej dla całej badanej populacji. Nie były to jednak prace wszystkich uczniów z tych województw, tylko tych uczniów, których nauczyciele odpowiedzieli na prośbę GFR i przysłali prace. Nauczyciele, którzy nadesłali prace, dostarczyli komplety prac uczniów z danej klasy.

Grupę wszystkich 70 tys. uczniów, którzy pisali analizowany test, nazywać będę *pełną grupą badanych uczniów*, natomiast grupę tych 800 uczniów, których prace pisemne szczegółowo analizowaliśmy – *grupą szczegółowo badanych uczniów.*

[1]Więcej informacji na temat tradycyjnego podziału treści między klasami I-III i klasami IV-VI oraz zmian w roku 2007 można znaleźć w moich dwóch artykułach [1] i [2].

2. Badane umiejętności uczniów

Arkusz testu składał się z dwóch części: zadań 1-8 (zwanych dalej częścią zasadniczą testu) oraz dwóch zadań dodatkowych. Ta druga, nieobowiązkowa część testu przewidziana była dla uczniów, którzy rozwiążą szybko zadania 1-8 (z założenia – niezbyt skomplikowane) i będą mieli siłę i ochotę, by zmierzyć się z kolejnymi – mniej standardowymi zadaniami.

Były dwie wersje testu – A i B, tak aby uczniowie siedzący przy jednym stoliku mieli inne zadania do rozwiązania. Wyniki naszych analiz omówię dla obu wersji testu łącznie, ale prezentuję tylko treści zadań z wersji A. W wersji B zadania miały takie same polecenia, bardzo zbliżone fabuły zadań tekstowych, analogiczne rodzaje liczb. Jednak w niektórych zadaniach podane były w innej kolejności typy zadań w podpunktach (w zad. 2, zad. 4, zad. 6) lub działania do wyboru (w zad. 7). Np. w zad. 4 w wersji A najpierw zamieszczono podpunkt na porównywanie ilorazowe, a potem na różnicowe, zaś w wersji B odwrotnie.

Za pomocą testu badane były umiejętności uczniów w zakresie następujących treści nauczania matematyki w klasach I-III:

- rachunek pamięciowy (w zakresie 100, w zakresie 1000 i w zakresie 10 000),
- porównywanie różnicowe i ilorazowe,
- korzystanie z odwrotności działań,
- mierzenie czasu,
- rozwiązywanie zadań tekstowych jednodziałaniowych,
- umiejętność radzenia sobie z zadaniami niestandardowymi (były to zadania, do których rozwiązania wystarczała wprawdzie wiedza w zakresie treści podstawy programowej dla klas I-III, ale wymagały pewnej pomysłowości i rozumowania z jednej strony nietypowego, a z drugiej – systematycznego, uwzględniającego koniunkcję kilku warunków).

3. Wyniki pełnej grupy badanych uczniów

Poprzez zasadniczą część testu (zadania 1-8) badane były umiejętności podstawowe, które powinien był opanować każdy uczeń po klasie III szkoły podstawowej. Aby jednak stopień opanowania umiejętności uczniów oceniać realnie (zważywszy na ograniczone predyspozycje intelektualne niektórych uczniów, nieobecności w szkole i różne przypadki losowe, a także fakt, że niektóre błędne wyniki są tylko skutkiem nieuwagi), przy opisie uzyskanych wyników ilościowych posługujemy się następującymi określeniami i przedziałami procentowymi:

- *umiejętność opanowana jest w stopniu wysokim* – uczniowie uzyskali 80% lub więcej możliwych punktów,
- *umiejętność opanowana jest w stopniu średnim* – od 60% do 79% punktów,
- *umiejętność opanowana jest w stopniu niskim* – od 40% do 59% punktów,
- *umiejętność opanowana jest w stopniu znikomym* – poniżej 40% punktów.

3.1. Umiejętności opanowane w stopniu wysokim

Taką umiejętnością było dodawanie i odejmowanie w zakresie 100 i 1000 (zad. 1) – uczniowie zyskali tu prawie 85% możliwych punktów.

1. Oblicz w pamięci:

46 + 28 = ...	85 – 48 = ...	617 + 9 = ...	867 – 50 = ...
95 – 56 = ...	72 + 60 = ...	223 – 5 = ...	145 + 20 = ...
17 + 35 = ...	102 – 7 = ...	398 + 4 = ...	820 – 60 = ...

3.2. Umiejętności opanowane w stopniu średnim

Były to pozostałe, szeroko rozumiane umiejętności w zakresie rachunku pamięciowego, tj. działania zapisane w tradycyjny sposób (część zad. 3 i zad. 8), ale również obliczenia podane w postaci równań z okienkami (część zad. 3) oraz sformułowane z użyciem zwrotów charakterystycznych dla porównywania różnicowego lub ilorazowego – takich jak: „liczba o 2 mniejsza”, „3 razy większa” (zad. 2). W każdym z wymienionych zadań uczniowie uzyskali około 2/3 możliwych punktów.

3. Wpisz w okienka odpowiednie liczby:

$7 \cdot 90 = \square$	$400 : 5 = \square$	$420 : 60 = \square$	$6 \cdot 12 = \square$
$\square \cdot 6 = 54$	$\square : 7 = 7$	$\square + 33 = 72$	$\square - 25 = 45$
$9 \cdot \square = 72$	$36 : \square = 9$	$58 + \square = 80$	$42 - \square = 14$

8. Oblicz w pamięci:

6399 + 1 = ...	4999 + 2 = ...	7099 + 3 = ...
5100 – 1 = ...	3800 – 2 = ...	8000 – 3 = ...

2. W miejscu kropek zapisz działanie i oblicz jego wynik.

Kasia pomyślała sobie liczbę 18.

a) *Liczba o 2 mniejsza od liczby Kasi to* ....

b) *Liczba 3 razy większa od liczby Kasi to* ....

c) *Liczba o 9 większa od liczby Kasi to* ....

d) *Liczba 6 razy mniejsza od liczby Kasi to* ....

3.3. Umiejętności opanowane w stopniu niskim

W tej kategorii znalazły się dwa typy umiejętności – dotyczące mierzenia czasu (zad. 5 i zad. 6) oraz zadań tekstowych[2] zamieszczonych w zad. 4 i zad. 7.

Lepiej wypadły umiejętności z zakresu mierzenia czasu. Umiejętność wykonywania obliczeń zegarowych (zad. 5) znalazła się nawet na pograniczu stopnia średniego – około 60% uzyskanych punktów. Zaskakujący był natomiast fakt, że odczytywanie czasu z zegara ze wskazówkami (zad. 6) okazało się wręcz trudniejsze niż obliczenia zegarowe – 55% punktów.

5. Koncert chóru szkolnego rozpoczął się o godzinie 16:40.

a) Koncert ten trwał 35 minut. O której godzinie się zakończył? ....

b) Ustawianie krzeseł na widowni zakończono 50 minut przed rozpoczęciem koncertu. Która była wtedy godzina? ....

Gorzej uczniowie radzili sobie z rozwiązywaniem jednodziałaniowych zadań z odwracaniem z zad. 4 i zad. 7. W zad. 4 uczniowie uzyskali nieco powyżej 50%, a w zad. 7 – już poniżej 50% punktów.

[2]Zadania w podpunktach zad. 4 i zad. 7 to zadania z odwracaniem, w przeciwieństwie do zadań prostych w zad. 2. Przy zadaniu prostym naturalne jest zapisania wykonywanego działania, np. schemat zad. 2a to $18 - 2 = \square$, a zad. 2b to $3 \cdot 18 = \square$ (niewiadoma liczba to po prostu wynik stosownego obliczenia). Natomiast naturalnym schematem zadania z odwracaniem jest równanie, np. w zad. 4a otrzymujemy równanie $32 : \square = 8$ lub $\square \cdot 8 = 32$, a w zad. 7c równanie $9 = 3 \cdot \square$ lub $3 \cdot \square = 9$.

6. Zapisz w systemie 24-godzinnym wskazania zegara.

przed południem

....

po południu

....

po południu

....

4. Reklama ciastek „Pyszne" trwała 8 sekund, a ciastek „Wyborne" 32 sekundy.

a) Ile razy dłuższa była reklama ciastek „Wyborne"?

Obliczenia: ....

Odp. ....

b) O ile sekund krótsza była reklama ciastek „Pyszne"?

Obliczenia: ....

Odp. ....

7. Zastanów się, jakie działanie trzeba wykonać, aby rozwiązać zadanie. Znajdź je, wpisz wynik i skreśl błędne działania.

Polecenie dotyczy każdego z zadań a), b), c)

a) *Mama ugotowała 24 pierogi. Marta i Bartek zjedli po kilka pierogów. Zostało 8 pierogów. Ile pierogów zjedli łącznie Marta i Bartek?*

$24 + 8 =$ $\quad$ $24 - 8 =$ $\quad$ $24 : 8 =$ $\quad$ $24 \cdot 8 =$

b) *Właściciel hotelu „Zacisze" kupił róże. Rozdzielił je po 3 do wazonów. Wykorzystał w ten sposób 27 wazonów. Ile róż kupił?*

$27 \cdot 3 =$ $\quad$ $27 : 3 =$ $\quad$ $27 - 3 =$ $\quad$ $27 + 3 =$

c) *Suka Aza waży 9 kg i jest 3 razy cięższa od psa Burka. Ile waży Burek?*

$9 - 3 =$ $\quad$ $9 \cdot 3 =$ $\quad$ $9 : 3 =$ $\quad$ $9 + 3 =$

3.4. Umiejętności opanowane w stopniu znikomym

W zasadniczej części testu nie było pełnego zadania, w którym uczniowie uzyskaliby poniżej 40% punktów. Były natomiast takie podpunkty (zadania z odwracaniem porównywania ilorazowego, zad. 4a i zad. 7c, w których było po około 1/3 zdobytych punktów[3].

Poprawne rozwiązania niestandardowych zadań dodatkowych pojawiały się wyjątkowo; odnotowano tylko około 5% takich rozwiązań. GFR zbierała od nauczycieli tylko zbiorczą informację o liczbie zadań dodatkowych rozwiązanych przez uczniów – bez precyzowania, czy było to pierwsze spośród zamieszczonych poniżej zadań (oznaczmy je: zad. dod. 1), czy drugie (oznaczmy je: zad. dod. 2).

Zadania dodatkowe

Napisz taką liczbę czterocyfrową mniejszą od 2000, aby jej cyfra dziesiątek była 8 razy większa od cyfry jej jedności, a jej cyfra setek była o 6 większa od cyfry tysięcy.

....

Gdy 30 listopada Zosia wracała ze szkoły, obliczyła, że w kończącym się miesiącu było 5 niedziel. Napisz datę trzeciej z tych niedziel.

....

4. Wyniki grupy szczegółowo badanych uczniów

Stwierdziliśmy, że wyniki ilościowe grupy szczegółowo badanych uczniów okazały się prawie całkowicie zgodne z wynikami ilościowymi pełnej grupy badanych uczniów.

W tej części omówię wybrane obserwacje dotyczące grupy szczegółowo badanych uczniów – w zakresie mierzenia czasu, porównywania różnicowego i ilorazowego oraz rozwiązywania niestandardowych zadań dodatkowych.

4.1. Mierzenie czasu

Tak zwane wiadomości i umiejętności praktyczne, obejmujące w szczególności zagadnienia związane z mierzeniem czasu (zegar i kalendarz), przez wiele lat znajdowały się praktycznie tylko w programach nauczania klas I-III. Choć od paru lat pojawiły się również w podstawie programowej matematyki dla klas IV-VI, to wciąż w wielu podręcznikach szkolnych nie są traktowane w sposób systematyczny. Pojawia się tam jedynie trochę obliczeń zegarowych i zamian jednostek; umiejętności uczniów w zakresie odczytywania wskazań

[3] O innych wynikach pełnej grupy badanych uczniów można przeczytać w moich artykułach [3]-[5].

zegara zazwyczaj nie są sprawdzane i utrwalane. Przyjrzyjmy się zatem, jakimi umiejętnościami w zakresie mierzenia czasu charakteryzowali się uczniowie rozpoczynający w 2007 r. naukę w klasie IV.

4.1.1. Odczytywanie zegara ze wskazówkami i ich interpretacja w systemie 24-godzinnym

Umiejętność ta badana była poprzez zad. 6. W zadaniu tym dane były trzy zegary: wskazujący czas tuż przed połową godziny (nazwijmy tę część zadania podpunktem POŁ-), tuż po połowie godziny (podpunkt POŁ+) oraz tuż przed pełną godziną (podpunkt PŁN-).

W pełni poprawne rozwiązanie całego zadania miało niewiele ponad 1/4 uczniów. Również około 1/4 uczniów nie odczytała poprawnie żadnego z trzech danych wskazań zegara, przy czym około 7% wszystkich uczniów nie podjęło próby rozwiązania choćby w jednym podpunkcie.

- Poprawny odczyt zegara w systemie 24-godzinnym odnotowaliśmy w każdym z podpunktów POŁ- i POŁ+ w niespełna 60% rozwiązań, natomiast w podpunkcie PŁN- w niespełna 40% rozwiązań. Zatem *odczytywanie czasu tuż przed pełną godzinę okazało się istotnie trudniejsze niż pozostałe typy wskazań zegara.*

- Odczyt zegara różniący się o 12 godzin od poprawnego odczytu w systemie 24-godzinnym podano w 4% rozwiązań dla podpunktu POŁ+, a w 7% rozwiązań dla każdego z podpunktów POŁ- i PŁN-. Uczeń zapewne poradził sobie tu z odczytywaniem czasu z zegara ze wskazówkami, natomiast albo miał kłopoty z interpretacją tego wskazania w systemie 24-godzinnym (zwłaszcza w godzinach wieczornych), albo np. nie dość uważnie wykonywał polecenie. Rozwiązania tej kategorii nie stanowiły jednak zasadniczej części tych wszystkich rozwiązań, gdzie nie podano w pełni poprawnego odczytu zegara w systemie 24-godzinnym. Zatem *to nie problemy z interpretacją odczytu w systemie 24-godzinnym były przyczyną słabych wyników uczniów w zad. 6.*

- Kolejna kategoria to rozwiązania, w których: (i) bądź odczytano poprawnie minutę, ale błędnie godzinę, lub odwrotnie – poprawnie godzinę, ale błędnie minutę, (ii) bądź godzinę odczytano zapewne na podstawie wskazówki minutowej, a minutę na podstawie wskazówki godzinowej[4].

[4]Jak się wydaje, uczniowie mieli większe kłopoty z prawidłową identyfikacją wskazówek, tj. jako godzinowej i minutowej, gdy wskazówki nie były ułożone blisko siebie lub nie znajdowały się symetrycznie względem pionowej osi (słabiej było widać różnicę długości wskazówek).

Przy rozwiązaniach tych typów odnosiło się wrażenie, że choć umiejętność odczytywania czasu z zegara ze wskazówkami nie była w pełni przez tych uczniów opanowana, to jednak ogólnie orientowali się, jak korzystać z takiego zegara. Rozwiązania tej kategorii odnotowano łącznie u 15-20% uczniów w przypadku każdego z podpunktów POŁ- i POŁ+, natomiast w przypadku podpunktu PŁN- aż u niemal 1/3 uczniów (*w podpunkcie PŁN- wielu uczniów odczytało błędnie tylko godzinę*).

- Ostatnia kategoria to rozwiązania, w których: (i) bądź jako godzinę odczytano liczbę, która znajduje się na tarczy zegara przy końcu jednej ze wskazówek (godzinowej albo minutowej), a jako minutę – liczbę, która znajduje się przy końcu drugiej ze wskazówek, (ii) bądź były to rozwiązania trudne do jakiejkolwiek klasyfikacji, (iii) bądź w pracy ucznia brak było rozwiązania. *Rozwiązania tej kategorii można uznać za całkowity brak umiejętności odczytywania czasu z zegara ze wskazówkami.* W każdym z podpunktów zadania rozwiązania tej kategorii miało łącznie nieco ponad 20% uczniów.

Wyniki przeprowadzonych badań pokazały zatem przede wszystkim, że *sporo 10-latków w ogóle nie radzi sobie z odczytywaniem czasu z zegara ze wskazówkami lub że umieją to robić w bardzo ograniczonym zakresie.* Prawda jest taka, że dzieci coraz rzadziej korzystają z zegarów ze wskazówkami – zarówno w szkole, jak i w domu. W związku z tym można wręcz powiedzieć, że mamy do czynienia z wyraźną grupą „zegarowych analfabetów”. Pewne sygnały na temat tego, że część dzieci staje bezradnie przed zegarami ze wskazówkami lub gorączkowo poszukuje zegarów z wyświetlaczami cyfrowymi docierały do nas już wcześniej – bądź z anegdotycznych opowieści o sytuacjach życiowo-domowych, bądź od nauczycieli języka angielskiego, którzy zauważali, że obecnie, aby nauczyć dzieci podawania czasu „po angielsku”, najpierw trzeba je uczyć odczytywania wskazań zegara „po polsku”[5].

4.1.2. Obliczenia zegarowe z przekroczeniem progu godziny

Umiejętność ta badana była poprzez zad. 5. W podpunkcie (a) uczeń miał wyznaczyć czas następujący po danym czasie, w podpunkcie (b) – czas poprzedzający dany czas.

[5] Więcej szczegółów na temat kłopotów uczniów w zakresie odczytywania czasu oraz uwag metodycznych dla nauczycieli klas IV-VI borykających się z tym problemem można znaleźć w artykule [8] K. Kroplewskiej i M. Szymańskiej.

W pełni poprawne rozwiązanie całego zadania miało około 45% wszystkich uczniów, natomiast około 1/4 uczniów nie miała poprawnego rozwiązania w żadnym podpunkcie.

- Poprawne rozwiązania dla podpunktu (a) odnotowaliśmy w niemal 2/3 prac, natomiast dla podpunktu (b) już tylko w niewiele ponad 1/2 prac. Zatem *wyznaczenie czasu poprzedzającego dany czas okazało się istotnie trudniejsze niż wyznaczenie czasu następującego po danym czasie.*
- Kolejna kategoria to rozwiązania, w których podano poprawnie godzinę, ale niepoprawnie minutę lub odwrotnie (zaliczyliśmy tu tylko te rozwiązania, w których minuta określona była za pomocą liczby od 0 do 59, nie większej). Przy rozwiązaniach tych odnosiło się wrażenie, że uczniowie rozumieli, co mieli obliczyć, a ich odpowiedzi były tylko częściowo niepoprawne, zapewne głównie z powodu popełnionych błędów rachunkowych lub pomyłek. W przypadku podpunktu (a) rozwiązania tej kategorii miało trochę ponad 10% uczniów, a w przypadku podpunktu (b) – ponad 15% uczniów. W podpunkcie (b) więcej niż w podpunkcie (a) było rozwiązań z poprawną minutą, ale błędną godziną – na ogół uczniowie wpisali jako odpowiedź godzinę taką, jak dana w zadaniu, zmieniając jedynie liczbę minut.
- Zarówno w podpunkcie (a), jak i w podpunkcie (b) niecałe 5% wszystkich rozwiązań stanowiły takie, w których uczeń minutę określił za pomocą liczby większej od 59. Zdecydowaną większość takich rozwiązań stanowiły odpowiedzi, które byłyby poprawne, gdyby 1 godz. była równa 100 min. Zatem *wprawdzie pojawiało się błędne zamienianie jednostek czasu w systemie dziesiętnym, ale naprawdę rzadko było jedyną przyczyną niepoprawnego rozwiązania ucznia.*
- Ostatnia kategoria to: (i) bądź rozwiązania trudne do jakiejkolwiek klasyfikacji – z błędną zarówno godziną, jak i minutą, ewentualnie takiej postaci, że trudno odpowiedź z notatek ucznia wyodrębnić, (ii) bądź brak było rozwiązania w pracy ucznia. Część uczniów nie zwróciła uwagi nawet na prawidłowy kierunek upływu czasu, tj. np. w podpunkcie (b) podała czas następujący po danym. Rozwiązania tej kategorii wskazują już na poważniejsze kłopoty uczniów z wykonywaniem obliczeń zegarowych. W podpunkcie (a) takie rozwiązania miało łącznie ponad 15% uczniów, a w podpunkcie (b) – ponad 1/4 uczniów.

Stwierdziliśmy zatem, że obliczenia zegarowe z przekroczeniem godziny nie są łatwe dla uczniów (mimo że rozważany w zadaniu upływ czasu był mniejszy niż jedna godzina).

Dostrzegliśmy dwa rodzaje uczniowskich trudności. U niektórych uczniów zapewne był to jedynie brak wprawy przy wykonywaniu takich obliczeń, zwłaszcza przy przekraczaniu progu 60 (uczniowie lepiej radzili sobie z obliczeniami w systemie dziesiętnym, np. w zad. 1 testu). Natomiast u znacznej części uczniów widać bardzo niską sprawność rachunkową, być może również w połączeniu z nieprawidłowym zamienianiem jednostek czasu i jakimiś innymi problemami, trudnymi do zidentyfikowania bez wywiadów.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wyznaczanie czasu poprzedzającego dany czas okazało się dużo trudniejsze niż wyznaczanie czasu następującego po danym czasie. Przy tym trudniejszym obliczeniu uczniowie częściej błędnie podawali godzinę przy poprawnie wyznaczonej minucie, na ogół jednak globalnie nie radzili sobie z tym obliczeniem, w tym często rezygnowali z jego wykonania.

4.2. Porównywanie różnicowe i ilorazowe

Do roku 2007 zarówno porównywanie różnicowe, jak i ilorazowe były w programach klas I-III, natomiast w klasach starszych pojawiały się niesystematycznie – tylko w pewnych zadaniach (wielu nauczycieli klas starszych w ogóle nie znało tych terminów, choć mówiło np. o liczbie 2 razy mniejszej, czy o osobie o 3 lata starszej). W roku 2007 porównywanie ilorazowe zostało przesunięte z podstawy programowej dla klas I-III do klas IV-VI. Wiązało się to m.in. z opinią części metodyków i nauczycieli, że porównywanie ilorazowe jest trudniejsze od porównywania różnicowego. Przyjrzyjmy się, czy tak było rzeczywiście w przypadku uczniów rozpoczynających w 2007 r. naukę w klasie IV, którzy poznali oba typy porównań jeszcze w nauczaniu początkowym.

Umiejętności w zakresie porównywania różnicowego i ilorazowego badane były poprzez zad. 2, zad. 4 i zad. 7c. I tak rozwiązywanie zadań prostych – dobieranie działań do zwrotów charakterystycznych dla porównywania różnicowego i ilorazowego (zad. 2) okazało się jedną z najlepiej opanowanych spośród umiejętności badanych w całym teście, natomiast umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych jednodziałaniowych z odwracaniem porównywania różnicowego lub ilorazowego (zad. 4 i zad. 7c) – jedną z najsłabiej opanowanych przez uczniów[6].

[6] W ministerialnych programach matematyki dla klas I-III sprzed roku 1999 wymieniane były *explicite* cztery podstawowe typy zagadnień związanych z każdym z tych porównań. Dla porównywania ilorazowego były to: (i)-(ii) wyznaczanie wielkości n razy większej oraz wielkości n razy mniejszej od danej (odpowiadają temu obliczenia z zad. 2), (iii)-(iv) sprawdzanie, ile razy jedna wielkość jest większa od drugiej lub ile razy jest od niej mniejsza (obliczenia z zad. 4); dla porównywania różnicowego

4.2.1. Dobieranie działań do charakterystycznych zwrotów

Uczniowie uzyskali bardzo zbliżone procenty punktów w poszczególnych podpunktach zad. 2, tj. po 65-70% (1 punkt przyznawany był za zapisanie poprawnego działania i 1 za wpisanie poprawnego wyniku).

- Rozwiązanie w pełni poprawne, tj. zapisanie poprawnego działania i wpisanie poprawnego wyniku, odnotowaliśmy w każdym z podpunktów w około 55% prac. Zatem *w zakresie tych obu umiejętności łącznie trudność typu porównywania różnicowego i ilorazowego badanego poprzez zad. 2 okazała się zbliżona.*
- Rozwiązanie częściowo poprawne (tj. poprawne działanie z niepoprawnym wynikiem lub poprawny wynik, ale brak działania) pojawiło się u około 27% uczniów w podpunkcie z porównywaniem ilorazowym w wersji „więcej" (zad. 2b), natomiast w pozostałych podpunktach – u około 20% uczniów. Zatem *gdy dopuścimy jedną usterkę w rozwiązaniu – albo błędny wynik poprawnie zapisanego działania, albo brak zapisanego działania – stwierdzamy, że porównywanie ilorazowe w wersji „więcej" jest nieco łatwiejsze od porównywania ilorazowego w wersji „mniej" oraz od porównywania różnicowego.*
- Ostatnia kategoria obejmuje rozwiązania, w których nie ma ani poprawnego działania, ani poprawnego wyniku (tylko sporadycznie był to brak rozwiązania). W podpunkcie z porównywaniem ilorazowym w wersji „więcej" jest takich rozwiązań niespełna 20%, a w pozostałych podpunktach 25% lub odrobinę więcej. Około połowę rozwiązań tej kategorii stanowią takie, w których uczeń zapisał niepoprawne działanie.

Zaobserwowaliśmy następujące rodzaje trudności uczniów:

- *Mylenie porównywania różnicowego i ilorazowego* – istotna część uczniów w podpunkcie, w którym należało pomnożyć liczby, dodawała je (i odwrotnie), a w podpunkcie, w którym należało podzielić liczby, odejmowała je (i odwrotnie). W przypadku podpunktu z porównywaniem ilorazowym w wersji „więcej" było to 7% wszystkich rozwiązań, w pozostałych podpunktach niemal dwukrotnie tyle.
- *Brak zapisania działania* – w 25% wszystkich rozwiązań uczeń nie zapisał działania, podał tylko wynik (w około 15-20% wszystkich rozwiązań,

– analogicznie. Same nazwy „porównywanie różnicowe" i „porównywanie ilorazowe" odnoszą się do typu (iii)-(iv): porównania dwóch wielkości nie tylko przez ustalenie, która z nich jest większa, ale także podanie, ile wynosi ich różnica bądź ich stosunek (iloraz).

w zależności od podpunktu, był to poprawny wynik). W poleceniu zadania wyraźnie nakazano zapisać działanie, więc albo uczeń tego nie potrafił, albo nieuważnie przeczytał polecenie.

Część uczniów miała zatem zapewne trudność z przestawianiem się z porównywania ilorazowego na różnicowe (i odwrotnie), gdy oba typy porównań pojawiły się w jednym zadaniu. Z kolei część uczniów nie wykazała się umiejętnością pewnej niezbędnej formalizacji zapisu, tj. podaniem działania. Tego typu umiejętność jest w klasach IV-VI i gimnazjum wręcz niezbędna dla sukcesu w rozwiązaniu zadania, gdy pojawiają się większe lub bardziej skomplikowane liczby, zwłaszcza zaś przy zapisywaniu wyrażeń algebraicznych.

4.2.2. Rozwiązywanie zadań tekstowych jednodziałaniowych z odwracaniem

Trudności poszczególnych podpunktów zad. 4 okazały się bardzo różne: w podpunkcie z zadaniem na porównywanie różnicowe (oznaczmy to zadanie symbolem 4PR) uczniowie uzyskali blisko 70% punktów, natomiast w podpunkcie z porównywaniem ilorazowym (4PI) – mniej niż 40% punktów możliwych do uzyskania (1 punkt przyznawany był za zapisanie poprawnego działania, 1 za podanie poprawnego wyniku i 1 za poprawną odpowiedź).

- Zadanie z podpunktu 4PR w pełni poprawnie rozwiązało nieco ponad 60% uczniów, natomiast zadanie 4PI – niespełna 30% uczniów.
- Druga kategoria to rozwiązania z poprawnym działaniem, lecz błędnym wynikiem działania lub błędną odpowiedzią. Było takich rozwiązań około 10% w zadaniu 4PR, natomiast nieco więcej – około 13% w zadaniu 4PI.
- Dużo było rozwiązań z błędnie podanym działaniem – blisko 20% w zadaniu 4PR, natomiast aż niemal 50% w zadaniu 4PI. W podpunkcie PR najczęściej pojawiającym się błędnym działaniem było dzielenie, w PI – odejmowanie, choć dość często pojawiało się też mnożenie lub dodawanie.
- Ponadto w każdym z podpunktów w około 10% wszystkich prac brak było rozwiązania.

Zaobserwowaliśmy następujące trudności uczniów:

- *Zastępowanie porównywania ilorazowego przez różnicowe* – blisko 40% uczniów potraktowało zadanie na porównywanie ilorazowe jako zadanie na porównywanie różnicowe (odwrotnie – tylko kilka procent).
- *Trudności z oderwaniem się od skojarzeń z tzw. „zwrotami-kluczami”.* Terminem „zwroty-klucze” określamy pewne charakterystyczne sformułowania w treści zadania, sugerujące wybór działania (np. zwrot: „ile

razy dłuższa" sugeruje niektórym uczniom, że dana wielkość powiększa się, więc wybierają mnożenie lub czasem nawet dodawanie). Bezpośrednie stosowanie „zwrotów-kluczy" jest skuteczne w przypadku zadań bez odwracania. Czasem też przynosi pozytywne efekty w zadaniach z odwracaniem; tak mogło być np. w danym zadaniu na porównywanie różnicowe, ze zwrotem: „o ile krótsza". Często prowadzi to jednak do błędnego rozwiązania, np. w danym zadaniu na porównywanie ilorazowe niemal 10% uczniów zapisało mnożenie zamiast dzielenia.

- *Trudności z zapisaniem odpowiedzi.* Dostrzegalny był brak konsekwencji – podana odpowiedź nie miała wyraźnego związku bądź z zapisanym działaniem, bądź z postawionym w treści zadania pytaniem (nieco ponad 10% rozwiązań). Trudności te były widoczne zwłaszcza w zadaniu na porównywanie ilorazowe, gdzie uczniowie dodatkowo jeszcze zapisywali odpowiedzi w języku porównywania różnicowego, np. *Reklama ciastek „Pyszne" była o 4 sekundy krótsza niż reklama ciastek „Wyborne"* bądź używali w odpowiedzi błędnych zwrotów typu: „o 4 razy dłuższa".

Dane w zad. 7c zadanie na odwracanie porównywania ilorazowego okazało się równie trudne, jak zad. 4PI. Uczniowie uzyskali tu tylko około 1/3 punktów (1 punkt przyznawany był za wybranie poprawnego działania, a 1 za wpisanie poprawnego wyniku, o ile wcześniej uczeń wybrał poprawne działanie).

- W pełni poprawnie zadanie to rozwiązało niewiele ponad 30% uczniów.
- W około 10% wszystkich rozwiązań wybrano poprawne działanie, natomiast wpisano niepoprawny wynik lub nie wpisano żadnego wyniku.
- W 40% rozwiązań wybrano niepoprawne działanie – najczęściej było to mnożenie.
- W 13% wszystkich rozwiązań nie wybrano żadnego działania, tylko wpisano wyniki przy wszystkich danych działaniach.
- W pozostałych około 5% prac brak było rozwiązania.

Również w tym zadaniu odnotowaliśmy trudności uczniów z oderwaniem się od skojarzeń z tzw. „zwrotami-kluczami". Aż 35% uczniów wybrało tu mnożenie zamiast dzielenia (częściej niż w zad. 4PI).

Analiza rozwiązań zad. 4a, zad. 4b i zad. 7c, w przeciwieństwie do analizy rozwiązań zad. 2, w pełni potwierdziła opinię, że porównywanie ilorazowe jest dużo trudniejsze od porównywania różnicowego – w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych z odwracaniem. Warto tu zwłaszcza podkreślić, że taką dużą różnicę trudności zaobserwowaliśmy przy problemach stanowiących istotę *porównywania ilorazowego i ilorazowego: sprawdzanie, ile razy jedna wielkość jest większa od drugiej, okazało się znacznie trudniejsze dla uczniów niż sprawdzanie, o ile dana wielkość jest mniejsza od drugiej.*

4.2.3. Wpływ kolejności podpunktów na rozwiązanie ucznia

Jak to zaznaczyłam na wstępie, uczniowie dostali zadania w dwóch wersjach tak zredagowanych, by każdy podpunkt z wersji A miał dokładny odpowiednik w wersji B; nieznacznie przy tym zmieniono liczby. Natomiast odpowiadające sobie podpunkty zostały zamieszczone w niektórych zadaniach w innej kolejności. Jest to zabieg stosowany dość często przy układaniu zadań testowych; jego celem jest zminimalizowanie możliwości odpisywania odpowiedzi przez uczniów siedzących obok siebie. Tak zredagowane dwie wersji testu wydawały się osobom układającym je równoważne w zakresie stopnia trudności, tym bardziej że sprawdzano umiejętności nie tuż po ich opanowaniu przez uczniów, ale po dłuższym okresie utrwalania i używania w różnych sytuacjach i w różnej kolejności.

Zadaniami, w których zamieszczono w wersji B podpunkty w innej kolejności niż w wersji A, były oba zadania związane z porównywaniem różnicowym i ilorazowym – zad. 2 i zad. 4. Podczas analizowania rozwiązań tych zadań dokonano zaskakującego odkrycia. Okazało się, że wbrew intencjom układających te zadania, wyniki uczniów piszących dwie wersje tego samego zadania różniły się istotnie.

Odnieśliśmy wrażenie, że *część uczniów sugeruje się w trakcie rozwiązywania dalszej części zadania sytuacją, która wystąpiła we wcześniejszym podpunkcie lub warunku zadania.*

- Znaczna część uczniów stosowała w kolejnych podpunktach zad. 2 ten rodzaj działania, który zapisała w pierwszym podpunkcie. Przykładowo, gdy w wersji A testu w pierwszym podpunkcie należało podać liczbę o 2 mniejszą, to w kolejnych podpunktach niektórzy uczniowie stosowali tylko odejmowanie lub dodawanie; nie używali natomiast ani mnożenia, ani dzielenia. Natomiast odwrotnie było w przypadku wersji B tego zadania, rozpoczynającej się od podpunktu, gdzie należało podać liczbę 4 razy mniejszą.
- Część uczniów rozwiązując drugi podpunkt zad. 4, zapisała taki sam rodzaj działania, jak w pierwszym podpunkcie. Przykładowo, gdy w wersji A testu pierwszy pojawił się podpunkt 4PI (w którym należało zapisać dzielenie), to znaczna część uczniów rozwiązując drugi podpunkt (4PR) zadania również zapisała dzielenie lub mnożenie.

- Nawet niektórzy uczniowie radzący sobie z rozwiązywaniem zadań niestandardowych w zad. dod. 1 mylili się i po zastosowaniu porównywania ilorazowego w następnym kroku zamiast użyć porównywanie różnicowe, stosowali poprzedni rodzaj porównywania.

Ponadto zaobserwowaliśmy, że *dany typ zadania wypadał gorzej, gdy pojawiał się w ostatnim podpunkcie*. Sytuacja taka miała miejsce w zad. 4, gdzie np. podpunkt PR pojawił się w wersji A jako drugi w zadaniu i w zakresie tego podpunktu wyniki uczniów piszących wersję A testu były wyraźnie słabsze niż wyniki uczniów piszących wersję B testu (w szczególności w wersji A pojawiło się tu prawie cztery razy więcej braków niż w wersji B)[7]. Podobną tendencję dostrzegliśmy również w przypadku zad. 6, gdzie w wersji B typy wskazań zegarów podano w innej kolejności.

Myślę, że to bardzo pouczające odkrycia dla osób, które mają za zadanie przygotować równorzędne wersje testu, czy zwykłej szkolnej klasówki: *zmieniając kolejność podpunktów, można zmienić trudność zadania.*

4.3. Rozwiązywanie zadań niestandardowych

W porównaniu z uczniami z wielu innych krajów, polscy uczniowie wypadają słabo w zakresie tzw. twórczego myślenia i rozwiązywania zadań niestandardowych. Pisała o tym np. A. Sułowska w [10], omawiając słabe strony 15-latków badanych w ramach projektu PISA.

W opisywanych tu badaniach umiejętność rozwiązywania zadań niestandardowych sprawdzana była poprzez zadania dodatkowe. W naszym teście zamieszczone zostały zadania pewnego szczególnego typu – uczeń miał podać obiekt (w zad. dod. 1 liczbę, a w zad. dod. 2 datę) spełniający koniunkcję kilku warunków. Co więcej, niektóre spośród tych warunków nie były dane jawnie – należało je najpierw wywnioskować z podanych w zadaniu informacji.

Choć nie były to zadania obowiązkowe, około 45% uczniów podjęło próbę rozwiązania co najmniej jednego z tych zadań; każde z tych zadań z osobna próbowało rozwiązać po około 40% uczniów.

- Za poprawne rozwiązanie uznawaliśmy w przypadku zad. dod. 1 podanie poprawnej liczby, a w przypadku zad. dod. 2 – zarówno podanie poprawnego dnia i miesiąca, jak i podanie tylko liczby – domyślnie: poprawnego dnia (gdyż w poleceniu nie sprecyzowano, co oznacza data). Rozwiązanie poprawne uzyskało zarówno w zad. dod. 1, jak i w zad. dod. 2 tylko

[7] Więcej informacji na temat błędów uczniów przy rozwiązywaniu zad. 2 i zad. 4 można znaleźć w artykułach [7] i [9] E. Drewczynskiej-Mrożek.

około 5% wszystkich uczniów piszących test (co ósmy próbujący). Oba zadania rozwiązało poprawnie 2% wszystkich uczniów. *Uzyskane procenty poprawnych rozwiązań, zarówno w stosunku do wszystkich badanych uczniów, jak i tych, którzy podjęli próby rozwiązań tych zadań, oceniam jako bardzo niskie.*

- Druga kategoria to rozwiązania, w których uczniowie nie poradzili sobie tylko z jednym z warunków zadania (najtrudniejszym lub jednym z końcowych). W zad. dod. 1 były to rozwiązania z błędną tylko cyfrą setek (nie został w nich spełniony ostatni warunek z porównywaniem różnicowym) albo błędną tylko cyfrą dziesiątek szukanej liczby (niespełniony przedostatni warunek z porównywaniem ilorazowym). W zad. dod. 2 były to rozwiązania, w których uczniowie nie uwzględnili najtrudniejszego, ukrytego warunku zadania, że dzień, w którym bohater zadania wraca ze szkoły, nie może być niedzielą. Rozwiązań tych, bliskich rozwiązaniu poprawnemu, było po 6-7% w zadaniu.
- Trzecia kategoria to te pozostałe rozwiązania, które jeszcze w jakimś stopniu nawiązują do warunków podanych w zadaniu, tzn. spełniają jeden lub dwa spośród najłatwiejszych warunków. W zad. dod. 1 były to rozwiązania z błędną liczbą 4-cyfrową (część z liczbą mniejszą od 2000, część nie). W zad. dod. 2 były to rozwiązania typu: podany dzień byłby poprawny, gdyby listopad rozpoczynał się od poniedziałku bądź była to data z poprawnym miesiącem. W zad. dod. 1 rozwiązania tej kategorii podało 21% wszystkich uczniów, natomiast w zad. dod. 2 było 13% takich uczniów. Jak widać, były to rozwiązania zdecydowanie odległe od poprawnych.
- Czwarta kategoria to te rozwiązania, których związku z warunkami danymi w zadaniu nie odnaleźliśmy (sprawiały one wrażenie, iż popełniono przy nich wiele błędów lub powstały na zasadzie jakiegoś luźnego skojarzenia z danymi z zadania). Na przykład, wśród rozwiązań zad. dod. 2 pojawiły się działania z użyciem liczb danych w zadaniu (z wyłączeniem rozwiązań zakwalifikowanych do już wymienionych typów). Takich rozwiązań, wyglądających niezbyt optymistycznie, było 6% w przypadku zad. dod. 1, natomiast 13% w przypadku zad. dod. 2.

Zatem tylko uczniowie z dwóch pierwszych spośród powyżej wyróżnionych kategorii zaprezentowali umiejętności świadczące o zdolnościach do rozwiązywania zadań niestandardowych – albo osiągnęli sukces, albo byli stosunkowo bliscy sukcesu. W przypadku każdego z danych zadań stanowili oni około 11-12% badanych uczniów.

W przypadku każdego z zadań większość uczniów w ogóle nie podjęła próby rozwiązania. Złożyć się mogły na to różne przyczyny. Po pierwsze, zadania te były oznaczone jako dodatkowe i zamieszczone na końcu zestawu – niektórzy uczniowie mogli po prostu nie mieć dostatecznej ilości czasu na rozwiązanie choćby jednego z tych zadań (ta hipoteza wydaje mi się jednak mało prawdopodobna, bo dotarły do nas liczne sygnały, iż wielu uczniów określiło zasadniczą część testu jako łatwą i stosunkowo szybko się z nią uporało). Po drugie, część uczniów mogła po prostu nie wierzyć we własne siły, nie mając wcześniej doświadczeń z rozwiązywaniem zadań sformułowanych nieco inaczej niż rutynowe zadania matematyczne ze szkoły; mogli nie wiedzieć, jak się za nie zabrać. Po trzecie, mogła to być odpowiedzialna, sensowna decyzja ucznia, by nie wpisywać odpowiedzi w sytuacji, gdy choć rozumie się warunki, jakie ma spełniać szukany obiekt, nie ma się pomysłu, jak go wyznaczyć.

Jak się wydaje, rozwiązywanie zadań niestandardowych to domena raczej uczniów najlepszych. Przyjrzyjmy się zatem jeszcze, jak poradzili sobie z takimi zadaniami uczniowie o najwyższych wynikach z części zasadniczej testu, tj. ci, którzy uzyskali 80% i więcej możliwych punktów (było około 30% takich uczniów). W tej grupie 70% uczniów próbowało rozwiązać co najmniej jedno zadanie dodatkowe. Rozwiązanie poprawne uzyskało zarówno w zad. dod. 1, jak i w zad. dod. 2 około 16% uczniów tej grupy, a oba zadania rozwiązało poprawnie 7% uczniów tej grupy. Nawiasem mówiąc, poprawne rozwiązania zadań dodatkowych uzyskali prawie wyłącznie uczniowie z tej właśnie grupy (choć stanowili tylko około połowę próbujących zadania rozwiązać).

Wyniki uczniów w zakresie rozwiązywania zadań niestandardowych, choć nie są satysfakcjonujące, pokazują jednak, że pewna część uczniów znakomicie radzi sobie z zadaniami takimi, jakie były dane w teście. Jak przypuszczam, wśród uczniów, którzy nie wpisali żadnej odpowiedzi, są też osoby, które po prostu nie były oswojone z takimi zadaniami. Naszym obowiązkiem jest więc wspierać i rozwijać zdolności uczniów, dając im np. zadania podobne do tych z testu, ale oczywiście szukać też należy innych zadań wymagających nietypowego rozumowania. Być może wypracujemy w ten sposób jakąś bazę zadań dla tych dzieci, które nie znają jeszcze zbyt wielu technik z matematyki szkolnej, ale wyraźnie są w stanie rozumować niestandardowo, niealgorytmicznie.

5. Podsumowanie i wnioski do nauczania

Uczniowie *najlepiej z całego testu poradzili sobie z rachunkiem pamięciowym*, zwłaszcza w zakresie 100. Ostrzegam jednak przed myśleniem, że uzyskane dobre wyniki badań spowodowane są tylko tym, że rachunek pamięciowy jest łatwy i oczywisty dla uczniów. Ja odbieram to jako sukces tradycji naszego nauczania początkowego matematyki – przywiązywanie dużej wagi do ćwiczenia rachunku pamięciowego.

Część typów obliczeń pamięciowych zawartych w naszym teście po roku 2007 została przesunięta do podstawy programowej dla klas IV-VI: dodawanie i odejmowanie wykraczające poza 100 oraz mnożenie i dzielenie poza tabliczką mnożenia. Miejmy nadzieję, że zarówno autorzy podręczników, jak i nauczyciele klas IV-VI podejdą zarówno do utrwalania rachunku pamięciowego z klas I-III, jak i nauczania nowych typów pamięciowych obliczeń w sposób równie systematyczny, jak to ma miejsce w tradycji nauczania początkowego.

Sporym zaskoczeniem było dla nas zarówno to, że odczytywanie wskazań zegara okazało się trudniejsze od obliczeń zegarowych, jak i fakt, że *spora część uczniów nie potrafiła praktycznie w ogóle odczytywać wskazań zegarów ze wskazówkami*. Podejrzewam, że wielu twórców podręczników oraz nauczycieli klas IV-VI też nie jest tego świadomych i zgodnie z wymogami podstawy programowej od razu przechodzą do obliczeń zegarowych.

Natomiast świat wokół nas zmienił się – powszechnie występują łatwiejsze do odczytu zegary z wyświetlaczami cyfrowymi. Dzieci nie mają już motywacji do nauki odczytywania czasu z zegarów ze wskazówkami, nie są do nich przyzwyczajone w życiu codziennym. Rodzi się pytanie, czy jest sens uczyć wszystkie dzieci odczytywania takich zegarów, czy np. potraktować to jako materiał rozszerzający – tylko dla części spośród nich. W każdym razie w obecnej podstawie programowej dla klas I-III umiejętność odczytu różnych zegarów jest wyraźnie zaakcentowana. Poza tym cyfrowy zapis czasu ma pewne zasadnicze wady:

(i) niezbyt nadaje się kształtowania takich ważnych pojęć, jak pół godziny, kwadrans,

(ii) prowokuje do przekraczania progu setkowego przy obliczeniach.

W obecnej sytuacji trzeba nakłonić nauczycieli z klas I-III do zintensyfikowania działań związanych z odczytywaniem wskazań zegara, z drugiej zaś strony starannie sprawdzać przygotowanie uczniów rozpoczynających naukę w klasie IV i nadal zajmować się trzeba odczytywaniem czasu z tego właśnie zegara – zarówno w wielu naturalnych sytuacjach życiowych, jak i w ramach zabawy. Bardzo przydatne są ćwiczenia z modelem zegara, podczas których uczeń sam ustawia wskazówkę godzinową dla podanego czasu. Warto też w klasie umieścić i obserwować zegar ze wskazówkami. Bardzo dobrze byłoby wciągnąć do współpracy rodziców.

Ujawnione podczas naszych badań rodzaje kłopotów uczniów mogą posłużyć do opracowania stosownych ćwiczeń dla uczniów, począwszy od uczniów, których wypada zacząć uczyć korzystania z zegara ze wskazówkami niemal od podstaw (w klasie IV zapewne trzeba to będzie zorganizować w ramach zajęć reedukacyjnych). Innym uczniom potrzebne są głównie zabiegi służące doskonaleniu umiejętności odczytywania czasu z zegara ze wskazówkami i temu powinno się poświęcić czas w ramach lekcji dla całej klasy. Ważne jest, by dawać do odczytu zegary z różnymi typami wskazań, w szczególności dość często z czasem tuż przed pełną godziną, jak również, by dawać zegary z różnymi typami wskazań w różnej kolejności.

W ramach nauki interpretacji odczytów w systemie 24-godzinnym warto bardziej intensywnie potrenować godziny wieczorne – nieco bardziej oddalone od południa i używane rzadziej w realiach szkolnych. W ogóle warto uczniów oswoić z tym, o jakiej porze doby są godziny typu 20 lub 23, aby zdawali sobie sprawę z tego, że np. podanie 20 dla 8 rano jest życiowo bez sensu.

Obliczenia zegarowe z przekroczeniem progu godziny okazały się również niełatwe dla wielu uczniów, zwłaszcza wyznaczanie czasu poprzedzającego dany czas. Zatem uczniowie muszą wykonywać dużo ćwiczeń z cofaniem się w czasie, więcej niż w zakresie obliczania czasu następującego po danym czasie[8].

Począwszy od podstawy programowej z 2007 r. nauka obliczeń zegarowych przebiega zarówno w klasach I-III, jak i w klasach IV-VI, dokąd przesunięte zostały właśnie obliczenia zegarowe z przekroczeniem progu godziny. Również w klasach IV-VI ważne jest, by pamiętać o zasadzie stopniowania trudności przy wprowadzaniu i stosowaniu tych zagadnień. Najpierw warto uczyć obliczeń z małym, kilkuminutowym upływem czasu (bez przekroczenia progu godziny, potem stopniowo też z przekroczeniem progu). Następnie trzeba zwiększać upływ czasu, zwracając uwagę na to, by z początku obliczenia nie były uciążliwe, tj. dawać liczbę minut taką, by nie prowadziło to do nadmiernie trudnych rachunków liczbowych. Tu znów będą dwie opcje obliczeń – najpierw bez przekroczenia progu godziny, później z przekroczeniem tego progu. Na koniec trzeba przejść do obliczeń trudniejszych niż w zadaniu z testu, z większą liczbą godzin i minut.

Dla wielu uczniów bardzo pomocne są ćwiczenia z modelami zegarów, z przesuwaniem wskazówek w modelu zegara tradycyjnego lub cyferek w modelu zegara z wyświetlaczem cyfrowym. Ważne jest, by przyzwyczaić uczniów

[8]Jest to problem charakterystyczny dla uczenia dodawania i odejmowania. Przy każdym typie odejmowania uczniowie popełniają więcej błędów, a w podręcznikach i podczas lekcji więcej ćwiczeń jest na dodawanie.

do przekraczania innych progów niż dotychczasowy dziesiątkowy, a mianowicie progów 12, 24 i 60. Istotna grupa badanych uczniów popełniła tu błędy, wynikające zapewne również z mniejszej sprawności rachunkowej przy przekraczaniu progu sześćdziesiątki.

Szczególnie ważne jest, aby ćwiczenia dotyczyły życia codziennego, np. dzwonków w szkole, seansów filmowych w kinie, jazdy pociągiem itp. Wtedy żmudne i niewdzięczne obliczenia zegarowe nabierają sensu w oczach dzieci.

Bardzo pouczające są wyniki uzyskane przez nas w zakresie porównywania różnicowego i ilorazowego. Dobieranie działań do prostych przypadków porównywania różnicowego i ilorazowego okazało się dostępne dla zdecydowanej większości uczniów, oba rodzaje porównań były w tym zakresie podobnego stopnia trudności, a nawet odnosiło się wrażenie, że jeden przypadek porównywania ilorazowego (w wersji „więcej") jest łatwiejszy od porównywania różnicowego. Zupełnie inne wyniki uzyskaliśmy jednak dla zadań wymagających odwracania, w tym dla klasycznej sytuacji sprawdzania, ile razy jedna wielkość jest większa od drugiej; wówczas porównywanie ilorazowe okazało się dużo trudniejsze niż porównywanie różnicowe.

Jak zatem widać, opinia na temat, czy porównywanie ilorazowe jest trudniejsze od różnicowego, czy nie, zależy od zastosowanego rodzaju zadań. M. Dąbrowski w [6], głównie na podstawie zastosowanych w badaniach[9] zadań bez odwracania (jednodziałaniowych i złożonych), ponadto tylko w łatwiejszej wersji „więcej", sugerował, że porównywanie ilorazowe typu jest łatwiejsze niż porównywanie różnicowe.

Nasze badania pokazały, że zadania z odwracaniem są istotnie trudniejsze dla uczniów niż zadania proste, bez odwracania. Jak widać to na przykładzie porównywania różnicowego i ilorazowego (jak również innych jednodziałaniowych zadań z testu), pewne elementy danej umiejętności mogą być nietrudne, a inne przeciwnie. Ważne jest, by w nauczaniu podchodzić do zagadnienia wielostronnie, w szczególności nie zapominać o odwracaniu. Warto też prowadzić dalsze badania, by próbować ustalić, które elementy są dostępne tylko dla części uczniów oraz w jakim wieku. Chodzi zarówno o ostrożne używanie takich elementów w nauczaniu wszystkich uczniów, jak również o wyodrębnienie dobrych ćwiczeń dla uczniów zdolniejszych.

[9]Są to badania w ramach projektu współfinansowanego przez Europejski Fundusz Społeczny, uruchomionego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Badano również umiejętności matematyczne uczniów na przełomie klas III i IV szkoły – dwukrotnie: rok wcześniej niż my (dzieci uczone wg tej samej podstawy programowej co nasi badani) oraz rok później niż my (po roku obowiązywania podstawy programowej z 2007 r.).

W podstawie programowej z 2007 r. przesunięto porównywanie ilorazowe z klas I-III do IV-VI. Pozostaje otwarte pytanie, czy uczyć odwracania porównywania ilorazowego wszystkich uczniów i w jakim zakresie.

Wyniki naszych badań pokazują, że w roku 2007 po nauczaniu początkowym *uczniowie tylko wyjątkowo radzili sobie z rozwiązaniem zadania niestandardowego, zawierającego koniunkcję kilku warunków.* Oczywiście spodziewaliśmy się, że tego typu zadania dostępne są tylko dla pewnej grupy uczniów, będących w stanie zmierzyć się z zadaniami wymagającymi nietypowego i zarazem uporządkowanego myślenia. Okazało się, że jedynie 1-2 uczniów w statystycznej klasie było w stanie rozwiązać poprawnie co najmniej jedno z danych w teście zadań. Jest to za mało, gdy weźmie się pod uwagę następujące czynniki:

(i) znany jest charakterystyczny dla tego wieku uczniów zapał do rozwiązywania zadań dodatkowych, w tym „matematycznych zagadek" (również w naszych badaniach blisko połowa uczniów próbowała zmierzyć się z takimi zadaniami, a w grupie uczniów o najwyższych wynikach w teście – ponad 2/3 uczniów),

(ii) w klasach czwartych, w których nauczyciele regularnie dostarczają uczniom „zadania dla chętnych", obserwowałam jednak zazwyczaj większą – co najmniej kilkuosobową grupę uczniów, którzy radzili sobie z nietypowymi zadaniami.

Trzeba wyraźnie uzmysłowić sobie fakt, że brak jest w Polsce tradycji w zakresie kształcenia uczniów zdolnych w wieku do 10-11 lat. W szczególności brak przygotowania nauczycieli do kształcenia takich uczniów. Problemem jest, jakie dodatkowe zadania powinni otrzymywać chętni uczniowie. Wielu nauczycieli po prostu daje kolejne zadania rachunkowe, opracowane np. w jakiejś atrakcyjnej formie (kolorowanka, odgadywanie hasła itp.) i może to być dobry pomysł w przypadku niektórych uczniów, ale nie jest wystarczające w przypadku uczniów zdolniejszych. Niektórzy nauczyciele, a także rodzice, dają im więc zadania „do przodu", tj. takie, które są zadaniami typowymi dla materiału następnych zajęć lub następnej klasy. Jest to jednak niedobre, bo później uczniowie nudzą się, gdy klasa dojdzie do tych tematów.

Nauczyciele klas I-III, a niejednokrotnie też klasy IV, mają kłopot z podaniem zadań nietypowych. Nie ma odpowiedniego zasobu takich zadań w dostępnych podręcznikach. Niejednokrotnie też nauczyciele nie do końca wiedzą, jak takie zadania można rozwiązać, ograniczając się do sposobów znanych lub dostępnych ich uczniom (a więc np. bez stosowania równań).

Warto apelować do nauczycieli klas I-III, by dawali chętnym uczniom zadania nietypowe. Jednakże może to przekraczać możliwości przeciętnego nauczyciela nauczania początkowego, dlatego też równocześnie trzeba wspomóc ich w pracy z uczniami zdolnymi – pomagać im w znalezieniu odpowiednich zadań i szkolić zarówno w zakresie rozwiązywania takich zadań, jak i form rozwijania umiejętności ucznia zdolnego. Należy pamiętać, że nauczyciele klas I-III nie są matematykami i wielu spośród nich może czuć obawę przed stosowaniem nietypowych zadań w nauczaniu. Warto więc, by przy organizacji zajęć dla uczniów zdolnych i szkolnych konkursów matematycznych dla klas I-III pozyskać do współpracy nauczycieli matematyki w klasach IV-VI. Poza tym, trzeba uzmysłowić nauczycielom klas IV-VI, że to głównie oni są w stanie zarówno skutecznie wspomagać w tym zakresie nauczycieli z nauczania początkowego, jak i że powinni zintensyfikować, a często po prostu uruchomić proces kształcenia uczniów zdolnych zaraz od początku klasy IV.

Na koniec zwracam jeszcze uwagę na specyficzną trudność tkwiącą w każdym z zastosowanych w teście zadań dodatkowych, tj. na *kłopoty uczniów z uwzględnieniem wszystkich warunków koniunkcji*. Nie zdziwiły mnie one zanadto (i stąd m.in. pomysł na takie zadania dodatkowe w naszym teście), ponieważ obserwuję je dość często podczas lekcji w szkole podstawowej, również w klasach IV-VI. Nie mam tu na myśli zadań o podwyższonym stopniu trudności ze skomplikowanymi koniunkcjami. Chodzi o zwykłe zadania, przy których trzeba np. narysować figurę spełniającą koniunkcję dwóch oczywistych warunków. Uczniowie w tym wieku dość często „wybierają” sobie tylko jeden warunek lub rysują dwie figury – do każdego warunku osobną. Trzeba więc bardzo naciskać na to, by zrozumieli, że wymaga się od nich, by spełnione były równocześnie oba dane warunki. Jak zauważyłam, wielu nauczycieli i autorów podręczników nie jest świadomych tych problemów uczniów.

Myślę zatem, że warto przede wszystkim starannie kształtować pojęcie koniunkcji dwóch warunków u wszystkich uczniów, z początku właśnie wręcz przesadnie akcentując, że mają być spełnione oba te warunki równocześnie. Trzeba takie zadania starannie dozować i wprowadzać zgodnie z zasadą stopniowania trudności. Zadania powinny polegać zarówno na sprawdzeniu, czy dany obiekt spełnia koniunkcję warunków, jak i na wskazaniu obiektów spełniających dane koniunkcje. Z kolei uczniom zdolniejszym warto dawać zadania z bardziej skomplikowaną koniunkcją, tj. z jednej strony nie 2, ale 3-4 warunki, z drugiej zaś z trudniejszymi warunkami do spełnienia (w tym np. niektóre podane w formie negacji).

Zasygnalizowane powyżej kłopoty uczniów wskazują również na trudności z analizą treści zadania – wyszukiwaniem warunków, które należy spełnić.

Warto zwrócić uwagę nauczycieli, że takiej analizy zadania trzeba uczniów starannie uczyć, w szczególności organizując np. wręcz konkursy na znalezienie jak największej liczby warunków w treści zadania, jak również na wskazanie pytania lub polecenia czy też np. wszystkich danych liczbowych. Przydatne jest tu np. podkreślanie na kolorowo kolejnych warunków, jak również staranne ich odczytanie, aby np. zauważyć, że w jednym warunku mowa jest o liczbie 6 razy większej, a w drugim o 8 większej. Warto też, zwłaszcza dla uczniów zdolniejszych, organizować konkursy na rozszyfrowywanie ukrytych warunków zadania (takich jak ten, iż 30 XI nie może być niedzielą w zad. dod. 2). Należy też zwrócić uwagę, że warunki dane w zadaniu czasem warto stosować nie po kolei, lecz np. zaczynając od końca.

Zadania z koniunkcją kilku warunków to jeden z pomysłów na rozwijanie rozumowania uczniów szkoły podstawowej, zwłaszcza uczniów zdolniejszych. Szereg pomysłów dostarczyć mogą też zadania zastosowane w badaniach M. Dąbrowskiego (patrz [6]).

Relacjonując wyniki naszych badań w zakresie zadań z zasadniczej części testu, skupiłam się na trudnościach i niedostatkach uczniów. Jednakże z naszych badań wynika też, że znaczna część uczniów radziła sobie z badanymi tam podstawowymi umiejętnościami naprawdę dobrze. Pracując nad poprawieniem umiejętności uczniów średnich i słabszych, nie zapominajmy zatem o potrzebie nieustannego wspomagania rozwoju uczniów nie mających tych trudności. Warto podsuwać im zadania bardziej skomplikowane, łączące w sobie różne umiejętności, np. takie, gdzie obliczenia zegarowe występują w połączeniu z odczytywaniem czasu, z trudniejszymi obliczeniami, o bardziej złożonej treści (np. więcej niż jedno obliczenie w zadaniu) lub z mniej typowym rozumowaniem.

Bibliografia

1. Demby A., 2008a, Matematyka w nauczaniu początkowym, cz. 1, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **46**, 3-5

2. Demby A., 2008b, Matematyka w nauczaniu początkowym, cz. 2, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **47**, 3-7

3. Demby A., 2009a, Umiejętności uczniów na początku klasy IV, cz. 1, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **48**, 3-8

4. Demby A., 2009b, Umiejętności uczniów na początku klasy IV, cz. 2, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **49**, 9-12

5. Demby A., 2009c, Umiejętności uczniów na początku klasy IV, cz. 3, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **50**, 5-8

6. Dąbrowski M. (red.), 2009, *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasista i jego nauczyciel*, Raport z badań ilościowych 2008, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa

7. Drewczynska E., 2009, Ile razy więcej?, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **50**, 9-11

8. Kroplewska K., Szymańska M., 2010, Odczytywanie czasu, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli matematyki*, **54**, 32-34

9. Mrożek E., 2010, O porównywaniu, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **53**, 32-34

10. Sułowska A., 2008, Badanie PISA 2006, *Matematyka w Szkole. Czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów*, **43**, 3-5

DYSKUSJA

Profesor Zbigniew Semadeni – W kontekście matur wspomnę, że kilkanaście lat temu zostałem członkiem komisji dydaktycznej powołanej przez Europejskie Towarzystwo Matematyczne. Zadaniem tej komisji była próba określenia *reference levels*. Co to znaczy? Nie może być jednolitych programów nauczania dla Europy. Unia Europejska nie może ich nakazać (nawet rząd w Berlinie nie może tego nakazać landom, bo to jest wyraźnie zakazane w konstytucji Niemiec, może najwyżej pomagać im we wzajemnym informowaniu się i koordynacji prac). Komisji chodziło o to, żeby znaleźć jakiś sposób, by wymagania podawane w jednym kraju, można było interpretować w świetle wymagań drugiego kraju.

Jako ciekawostkę powiem, że zaraz na pierwszym spotkaniu podano jako przykład, że twierdzenie Talesa we Francji jest innym twierdzeniem niż w Niemczech. Twierdzenie Talesa we Francji, to jest tak, jak w Polsce, to znaczy: dwie równoległe przecinają kąt, a w Niemczech chodzi o kąt oparty na średnicy koła. Spytałem francuskiego dydaktyka: Jak wy rozumiecie twierdzenie Talesa? Odpowiedział: jest sześć twierdzeń Talesa: metryczne twierdzenie Talesa, afiniczne twierdzenie Talesa itd. To samo twierdzenie, tylko formalizowane w językach różnych teorii; w Polsce nikomu nie przyszłoby do głowy tak stawiać sprawę.

Komisja ta działała trzy lata, było parę spotkań, z finałem w Luksemburgu. Konkluzja uczestników: takiego systemu *reference levels* nie da się zrobić. Nie da się opracować kryteriów pozwalających obiektywnie interpretować dokument dotyczący wymagań z innego kraju, jeżeli się dobrze nie wie, co się za tym kryje, jaka jest tradycja. Na przykład, są dwa twierdzenia Pitagorasa: jedno dla pól, drugie dla odcinków. To drugie wymaga pierwiastków kwadratowych; pierwsze jest bardziej elementarne. Przy okazji wspomnę, że w 1976 roku zostały wprowadzone liczby rzeczywiste, wymierne i niewymierne, do programu V klasy szkoły podstawowej (uznanej oficjalnie za V klasę 10-letniej szkoły średniej). Przy pierwszym podręczniku rozpętała się burza. Obrońcy programu argumentowali: skoro ma być twierdzenie Pitagorasa, to trzeba obliczać długość przeciwprostokątnej, wobec tego potrzebne są pierwiastki, w szczególności pierwiastek z dwóch, a jak ma być pierwiastek z dwóch, to trzeba wprowadzić uczniom liczby niewymierne i jeszcze do tego musi być koniecznie dowód, że pierwiastek z dwóch jest liczbą niewymierną. Tłumaczyliśmy, że nawet maturzyści nie rozumieją tego dowodu. Jeden z profesorów, skądinąd wybitny i bardzo zasłużony, powiedział: będę walczyć o poziom polskiej szkoły, o to, by były pierwiastki i liczby niewymierne. Skutki owych reform odczuwamy po dzień dzisiejszy, bo od tego momentu nauczyciele uświadomili sobie, że realizacja programów jest niewykonalna i szkoła uruchomiła wtedy mechanizmy obronne.

Doktor Danuta Ciesielska (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie) – Tylko w kwestii wyjaśnienia. Jeżeli chodzi o nazwę „twierdzenia Talesa", to my nie mamy racji. Tak zwane twierdzenie Talesa nie jest twierdzeniem pochodzącym od Talesa. Rację mają Niemcy! Talesowi przypisuje się pięć twierdzeń, w tym fakt, że kąt oparty na średnicy jest kątem prostym. Wśród nich nie ma „naszego" twierdzenia Talesa. My niesłusznie, razem z Europą Środkową, nazywamy „twierdzenie Talesa" jego imieniem, a większa część Europy Zachodniej, słusznie, nazywa jego imieniem to o kącie opartym na średnicy. Jeśli chodzi o twierdzenie Pitagorasa, to tam też są różne bajki, ale to może w innym terminie, na innym spotkaniu. Dziękuję bardzo.

Doktor Monika Czajkowska (Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy Jana Kochanowskiego w Kielcach) – Chciałam podzielić się z Państwem kilkoma refleksjami. Pan Profesor mówił, że uczniowie klas początkowych rozpatrywali zadania w kontekście innych zadań. Tego typu zachowania występują nie tylko u uczniów klas I-III, ale również u starszych uczniów, a nawet studentów. Prowadzone przeze mnie badania i obserwacje w tym zakresie wyraźnie pokazują, że jeżeli zadania są umieszczone w tym samym dziale w podręczniku, pojawiają się na jednej lekcji lub kilku lekcjach na ten sam temat, są do siebie podobne pod jakimś względem, to uczniowie rozpatrują je jako kolejne elementy pewnej serii. Podam kilka przykładów. Na jednej z lekcji matematyki w gimnazjum uczniowie omawiali twierdzenie Pitagorasa. Na pracę domową nauczycielka zadała zadanie, które nie dotyczyło tematu bieżącej lekcji, ale lekcji poprzednich. Nie poinformowała o tym uczniów. Gimnazjaliści potraktowali je jako kolejny element serii zadań na twierdzenie Pitagorasa i usilnie starali się wykorzystać to twierdzenie do rozwiązania zadania. Kolejny przykład.

Przeprowadziłam pewien eksperyment wśród moich studentów. Dałam im cztery zadania, wizualnie bardzo do siebie podobne. Trzy można było rozwiązać, stosując ten sam algorytm postępowania, czwarte – celowo – było zadaniem z danymi sprzecznymi. Studenci dostrzegając podobieństwo wizualne podanych zadań, nie czytali tekstu czwartego zadania i rozwiązywali je mechanicznie, posługując się algorytmem stosowanym w przypadku trzech wcześniejszych zadań. Moim zdaniem, schemat działania uczniów i studentów jest taki – rozpatrują zadanie w kontekście, w jakim zostało ono umieszczone, dostrzegają jego podobieństwo do innych, na tej podstawie zadanie klasyfikują, a następnie stosują algorytm, który uważają za właściwy.

Druga refleksja dotyczy środków poglądowych. Pan Profesor wspominał o zegarze z tarczą. Otóż, w podręcznikach jest bardzo wiele środków, które mają ułatwić uczniowi zrozumienie pewnych treści matematycznych. Niektóre z tych środków dawniej na pewno spełniały tę rolę, ale współcześnie nie tylko nie ułatwiają zrozumienia, ale mogą stwarzać pewne trudności w procesie nauczania – uczenia się. Przykładem takiego przestarzałego środka, obok wymienionego zegara, jest np. waga szalkowa wykorzystywana przy nauce o równaniach. W dzisiejszych czasach waga szalkowa praktycznie nie jest używana i młode pokolenie nie zna tego przedmiotu. Przytoczę pewien przykład z praktyki szkolnej. Nauczycielka klas I-III chciała pokazać dzieciom wagę szalkową. Niestety napotkała trudności w jej zdobyciu. Okazało się, że w szkole wagi szalkowej nie ma. W sklepach są tylko wagi elektroniczne. Ostatecznie, aby wyjaśnić uczniom, co to jest waga szalkowa i na czym polega zasada jej działania, wykorzystała huśtawkę w pobliskim przedszkolu. Zwróćmy uwagę, że nauczycielka nie mogła od razu wykorzystać wagi jako środka poglądowego; musiała wykorzystać jeden środek poglądowy do wyjaśnienia innego środka.

Trzecia uwaga dotyczy podręczników, a dokładniej podręczników do nauki informatyki w klasie pierwszej szkoły podstawowej. Analiza tych podręczników ujawnia, że uczeń, aby móc z nich korzystać, powinien rozpoczynając naukę w pierwszej klasie szkoły podstawowej już sprawnie pisać, czytać i liczyć. Fakt ten pozostaje w sprzeczności z zapisami podstawy programowej z 23 grudnia 2008 r. Treści zawarte w podręcznikach do nauki informatyki w klasie pierwszej szkoły podstawowej nie są skorelowane z treściami w podręcznikach do kształcenia zintegrowanego. Dostrzegam potrzebę ścisłej współpracy nauczycieli klas początkowych z nauczycielami informatyki. Dziękuję.

Profesor Zbigniew Semadeni – Nie wiadomo, co naprawdę wiedział Tales, postać na pół legendarna. Wiadomo, że umiał obliczyć odległość statku na morzu. Były liczne próby *rational reconstructions*, czyli próby ustalenia, jak on mógł to robić; źródła dotyczące Talesa są skąpe i niepewne, bo zapisane wiele generacji po jego śmierci. Wag szalkowych w praktyce dziecko nie spotka. Kiedyś były jeszcze wagi uchylne, analogowe, było chociaż widać, że coś jest cięższe lub lżejsze. Obecnie – co uczeń widzi? Na wadze w sklepie wyskakują cyferki, ale to nie tylko kilogramy i dekagramy, ale też kwota, ile trzeba zapłacić. To już kompletnie pomieszanie. Warto samemu zrobić wagę szalkową, prof. Gruszczyk-Kolczyńska opisuje to w swojej książce. Wystarczy zresztą zwykły wieszak, taki do spódnic, który ma na końcach haczyki lub uchwyty. Przyczepia się reklamówki po obu stronach, dzieci wkładają klocki i ważą nimi np. maskotkę. Dzieciom potrzeba wielu takich doświadczeń, aby ciężar nie był dla nich czystą abstrakcją. Niestety algebra straciła wagę jako tradycyjny, poglądowy, dobry wzorzec pojęciowy do równań. Niektórzy nauczyciele ciągle używają tej argumentacji, zapominając, że uczeń nie wie, co to jest waga szalkowa.

Doktor Danuta Ciesielska – Z wyjaśnieniem dotyczącym tego, co Tales wiedział, a czego nie wiedział, w szczególności tego, że Pan Profesor powołuje się na fakt, że Tales musiał znać twierdzenie Talesa, aby zmierzyć statek. Tomas Heath, w pracy dotyczącej wiedzy greckiej, podał cztery sposoby rozwiązania tego zagadnienia, trzy z nich nie wymagają znajomości twierdzenia Talesa. Jeszcze krótko, bo mi się przypomniało, to co Pani mówiła o wadze szalkowej. Czy naprawdę słusznie postępujemy, że usiłujemy uczniom tłumaczyć równość przez wagę szalkową, która dla nich również jest pojęciem nieznanym? Czy im to naprawdę pomoże – wieszak, waga, huśtawka – jeżeli oni nie kojarzą tego z pojęciem równości?

Doktor Krzysztof Ciesielski (Uniwersytet Jagielloński) – Jeszcze dwa zdania... Gdy Pani powiedziała o tych zegarkach, nawiązując do tego, co Pan Profesor powiedział, to uświadomiłem sobie pewną bardzo istotną rzecz. Może najpierw powiem Państwu dowcip, części pewnie przypomnę, bo to rzecz znana z czasów naszej młodości. Otóż, popularne były takie dowcipy o milicjantach. Jeden z nich był taki: milicjantom kupiono nowe, elektroniczne zegarki; stało dwóch milicjantów i jednego z nich przechodzień zapytał, która godzina. Milicjanci stoją, milczą, przechodzień zdenerwowany poszedł. Na to drugi milicjant pyta pierwszego: „czemu nie odpowiedziałeś? Grzecznie pytał, nie obrażał nas, nie zwymyślał, można było odpowiedzieć”. A na to pierwszy: „A czy ty myślisz, że to tak łatwo dziewiętnaście przez dwadzieścia osiem podzielić?!”. No i obecnie te dowcipy byłyby akurat odwrotne, bo dziś niestandardowy zegar to właśnie zupełnie inny zegar, ten klasyczny.

I może jeszcze jako pointę... Wczoraj wspominaliśmy tutaj nauczycieli matematyki. Mój nauczyciel matematyki powiedział kiedyś zdanie, które z lubością cytuję i mnie się wydaje, że to jest bardzo ładna ilustracja tej ostatniej równości, tego, co Pan mówił. On powiedział kiedyś, że matematyka ma to do siebie, że nigdy nie wiadomo, jak głęboko ktoś nie wie, o co chodzi. I w niektórych wypadkach to stwierdzenie ma znakomite zastosowanie. Bardzo dziękuję.

Profesor Zbigniew Marciniak – Króciutko, naprawdę. Z ogromnym zainteresowaniem wysłuchałem wszystkich wystąpień. One udowodniły, jak ten grant był potrzebny. Sporo absolutnie fundamentalnych kwestii zostało poruszonych – takich, jakie wcześniej się nie pojawiły w badaniach. Co więcej, jest jasne, że pozostaje mnóstwo innych kwestii, które się pojawiły jako rzeczy do zbadania i że tego typu badania są potrzebne. Druga sprawa: objawiło się coś jeszcze przy tym grancie. Ujawniła się taka spontaniczna, społeczna działalność ludzi, którym leży na sercu jakość kształcenia matematycznego i robią w tej sprawie bardzo wiele poza ramami swoich obowiązków. Co więcej, są gotowi dzielić się tymi swoimi umiejętnościami z ludźmi, którzy by chcieli podjąć podobną działalność. Najbardziej spontanicznie demonstrowało się to na tych dwóch konferencjach, o których tu była mowa. Mowa też była o „stajniach”. Chciałem powiedzieć, że chwała stajennym, to naprawdę jest ogromny dorobek i ze stajniami nie trzeba walczyć. Trzeba walczyć, by ich było jak najwięcej, wtedy stracą swój wyjątkowy charakter. Gdyby w każdym powiecie znalazła się choć jedna stajenka dla zdolnych źrebaków, to ja byłbym szczęśliwy.

Chciałbym na koniec, bardzo serdecznie, we własnym imieniu, podziękować Panu prof. Tomkowi Boreckiemu i za świetne prowadzenie, ale też za świetne zorganizowanie tej konferencji; bez jego wkładu, ona by tak nie przebiegła, jak przebiegła. Serdecznie dziękuję.

Profesor Tomasz Borecki – Szanowni Państwo, pozwolę sobie na zakończenie powiedzieć jeszcze parę zdań. Jak Państwo wiecie, z wykształcenia jestem leśnikiem. W okresie studiów w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego otrzymałem dobre przygotowanie matematyczne, gdyż zajęcia z tego przedmiotu były prowadzone na dwóch semestrach w dużym wymiarze godzin. W pracy zawodowej, zarówno w biurze projektowym jak i na uczelni, znajomość matematyki była niezbędna. W prowadzonych przeze mnie badaniach znajomość matematyki pozwalała na podejmowanie tematów ważnych dla praktyki, których bez tej znajomości nie można byłoby zrealizować.

Przysłuchiwałem się z wielkim zainteresowaniem wszystkim referentom i dyskutantom, nie pozwolili na chwile znudzenia. Tematyka dwudniowych obrad była bardzo interesująca.

Będę wdzięczny wszystkim Państwu, którzy brali udział w obradach za zdyscyplinowanie w przekazywaniu do Instytutu autoryzowanych wypowiedzi. Obiecuję Państwu, że publikacja, która się ukaże w znaczącym nakładzie 400 egzemplarzy, zostanie rozesłana do wszystkich, którzy są tą problematyką zainteresowani.

Jeszcze raz dziękuję wszystkim Państwu za tak liczne przybycie, ciekawe referaty, interesujące głosy w dyskusji, za miłą atmosferę podczas dwóch dni konferencji.

Spis treści

Zeszyty opublikowane przez Instytut

Rok 1997

I – Ochrona własności intelektualnej
II – Etyka zawodowa
III – Jakość kształcenia w szkołach wyższych
IV – Akademicka Komisja Akredytacyjna. System oceny jakości kształcenia i akredytacji w szkolnictwie wyższym

Rok 1998

V – Instrumenty rozwoju systemu kształcenia w Polsce
VI – Bezpieczeństwo człowieka we współczesnym świecie
VII – Misja uczelni
VIII – Polska a integracja europejska w edukacji. Aspekty informatyczne

Rok 1999

IX – Bezpieczeństwo człowieka we współczesnym świecie
X – Problemy etyczne techniki
XI – Koszty kształcenia w szkołach wyższych w Polsce. Model kalkulacyjnych kosztów kształcenia
XII – Władza i obywatel w społeczeństwie informacyjnym

Rok 2000

XIII – Kształcenie międzyuczelniane. Studium warszawskie
XIV – Produkcja, konsumpcja i technika a ocieplenie klimatu
XV – Czy kryzys demograficzny w Polsce?
XVI – Ekonomiczne i społeczne efekty edukacji

Rok 2001

XVII – Ekonomiczne i społeczne efekty edukacji
XVIII – Wolność a bezpieczeństwo
XIX – Ekonomiczne efekty edukacji w Polsce

Rok 2002

XX – Pamięć i działanie
XXI – Bezpieczeństwo człowieka we współczesnym świecie
XXII – Problemy etyczne w nauce
XXIII – Autorytet uczelni
XXIV – Jakość kształcenia i akredytacja w szkolnictwie wyższym w Polsce

Rok 2003

XXV – Zarządzanie bezpieczeństwem w sytuacjach kryzysowych
XXVI – Kierunki kształcenia i standardy nauczania w polskim szkolnictwie wyższym

Rok 2004

XXVII – Internet i techniki multimedialne w edukacji
XXVIII – Uczelnie a innowacyjność gospodarki
XXIX – Decyzje edukacyjne

Rok 2005

XXX – Emigracja – zagrożenie czy szansa?
XXXI – Zagadnienia bezpieczeństwa energetycznego
XXXII – Polskie uczelnie XXI wieku
XXXIII – Zagadnienia bezpieczeństwa wodnego

Rok 2006

XXXIV – Humanizm i technika
XXXV – Rola symboli
XXXVI – Wizja polskich uczelni w społeczeństwie globalnym

Rok 2007

XXXVII – Uczyć myśleć
XXXVIII – Obraz postępu i zagrożeń cywilizacyjnych w mediach
XXXIX – Czasopisma naukowe – zmierzch czy transformacja?

Rok 2008

XL – Warszawa Akademicka – Seminarium
XLI – Warszawa Akademicka
XLII – Polscy uczniowie w świetle badań PISA
XLIII – Prywatność – prawo czy produkt?

Rok 2009

XLIV – Woda w obszarach niezurbanizowanych
XLV – Społeczeństwo polskie wobec narodzin III Rzeczypospolitej (1988-1990)

Rok 2010

XLVI – Wykłady inaugurujące rok akademicki 2009/2010
XLVII – Podsumowanie dwunastolecia 1996-2008 – Marek Dietrich
XLVIII – Współpraca szkół średnich i wyższych
XLIX – Natura 2000. Szanse i zagrożenia

Rok 2011

L – Strategia nauczania matematyki w Polsce – wdrożenie nowej podstawy programowej